Egyváltozós analízis 1 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 3. félév, 2015. ősz

7. előadás (október 21.)

Az előadás elején egy rövid időre visszatértem a múlt óra egy kérdésköréhez, mégpedig az $1/0$ típusú határértékekhez. A tévhitek eloszlatása érdekében hasznosnak véltem kimondani két tételt. Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$. Ekkor – ahogy például az $f(x) = x$ mutatja – az $1/f(x)$ függvény határértékéről általában nem mondható semmi, azonban: ha az α egy ponotozott környezetében $f > 0$, akkor $\lim_{x\to\alpha} 1/f(x) = \infty$; ha pedig az α egy pontozott környezetében $f < 0$, akkor $\lim_{x\to\alpha} 1/f(x) = -\infty$. A bizonyításokat nem részleteztem, a definícióból könnyedén kipottyan (érdemes meggondolni gyakorlásképpen).

Ezután a függvényhatárérték és egyenlőtlenségek témakörébe kezdtünk bele. A kimondott tételek a múlt félévben sorozatokra igazolt eredményeknek a függvényekre vonatkozó megfelelő általánosításai. Az első tétel: ha $\lim_{x\to\alpha} f(x) > \lim_{x\to\alpha} g(x)$, akkor az α egy pontozott környezetében $f > g$. Vigyázat, fordítva nem igaz, például az $f(x) = 1/x$ és $g(x) = -1/x$, $\alpha = \infty$ választással $f > g$, ha $x > 0$, de mindkét függvény limesze a végtelenben 0. Az iménti tétel párja (a bizonyítás is indirekt módon való visszavezetés volt): ha $f \geq g$ az α egy pontozott környezetében, akkor $\lim_{x\to\alpha} f(x) \geq \lim_{x\to\alpha} g(x)$ feltéve, hogy minkét limesz létezik. Itt is megjegyeztük, hogy az állítás megfordítva nem igaz, tekintsük például az $f(x) = -1/x$ és $g(x) = 1/x$ függvényeket. A harmadik eredmény a függvényhatárértékre vonatkozó rendőrelv: ha az α egy ponotozott környezetében $f \leq g \leq h$, továbbá $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} h(x)$, akkor létezik $\lim_{x\to\alpha} g(x)$ is, amely az előbbi közös limesszel egyezik meg. Ezt nem túl nehéz igazolni az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó rendőrelv segítségével.

Rátértünk ezt követően a nevezetes függvényhatárértékekre (ez a téma nem a szívem csücske, mert eléggé szöszölős). Kimondtam, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} x^c = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } c > 0, \\ 1, & \text{ha } c = 0, \\ 0, & \text{ha } c < 0, \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0+0} x^c = \begin{cases} 0, & \text{ha } c > 0, \\ 1, & \text{ha } c = 0, \\ +\infty, & \text{ha } c < 0, \end{cases}$$

és az elsőnek beláttuk a $c \geq 0$ részét, a $c < 0$ (és a másik) házi feladat gyakorlásképpen. Ezenkívül felírtam, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } a > 1, \\ 1, & \text{ha } \ = 1, \\ 0, & \text{ha } 0 < a < 1, \end{cases} \qquad [\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{ha } a > 1, \\ 1, & \text{ha } a = 1, \\ +\infty, & \text{ha } 0 < a < 1. \end{cases} \ .$$

Az elsőt láttuk be, a bizonyítása egy fontos ötletet használt. Az $n \leq x < n+1$ (ahol n pozitív egész) feltételezés mellett sorozathatárértékre vezethető vissza a kérdés, és a kapott küszöbindexből megfelelő küszöböt nyerünk a függvényhatárértékre is (a második visszavezetés az elsőre, de ezt idő spórolása érdekében kihagytam).

Szerepelt még bizonyítással az, hogy $a > 1$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^c} = +\infty$, ami ugyancsak a korábbi, sorozatlimeszre való visszavezetés ötletét használta. Azt is felírtam, de nem igazoltam (valójában triviális visszavezetés), hogy $0 < a < 1$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{x\to+\infty} a^x \cdot x^c = 0$.

Az iménti határértékek kapcsán bevezettem az f függvény nagyságrendje nagyobb, mint a g függvény nagyságrendje az α helyen definíciót arra az esetre, ha $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$ és $\lim_{x\to\alpha} f(x)/g(x) = \infty$ (vagy ez utóbbi helyett egyenértékűen azt is írhatjuk, hogy $\lim_{x\to\alpha} g(x)/f(x) = 0$). Megtartjuk a sorozatoknál használt $f \succ g$ vagy $g \prec f$ jelöléseket, de vigyázzunk, hogy mindig hangsúlyozni kell, hogy milyen α helyen értjük a relációt. Például $2^x \prec 3^x$, ha $x \to \infty$, vagy $1/x \prec 1/x^2$, ha $x \to 0+0$. Végül bizonyítás nélkül az alábbi két nevezetes limeszt írtam fel: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{a} = 1$, ha $a > 0$ és $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = 1$, ahol $\sqrt[x]{a} = a^{1/x}$ (a bizonyítás egyébként ismét a megfelelő sorozatlimeszre való visszavezetést használná).

Az óra végén két példát néztünk a rendőrelvre: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{3^x + 2^x} = 3$ és $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{3^x - 2^x} = 3$ (ez utóbbit bár helyesen oldottam meg, de véletlenül két megoldást összemostam és így picit túlbonyolítottam).