Egyváltozós analízis 1 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 3. félév, 2015. ősz

5. előadás (szeptember 30.)

Az egész előadás a $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ függvényhatárérték definíciójának 15-féle esetét tárgyalta a megfelelő környezetfogalmakkal együtt. Az esetek többségére példákat is néztünk.

A környezetfogalmak ($\delta > 0$, $K \in \mathbb{R}$):

- $a \in \mathbb{R}$ környezetei: $(a - \delta, a + \delta$.
- $a \in \mathbb{R}$ pontozott környezetei: $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$.
- $a \in \mathbb{R}$ jobb oldali környezetei: $[a, a + \delta)$.
- $a \in \mathbb{R}$ bal oldali környezetei: $(a - \delta, a]$.
- $a \in \mathbb{R}$ pontozott jobb oldali környezetei: $(a, a + \delta)$.
- $a \in \mathbb{R}$ pontozott bal oldali környezetei: $(a - \delta, a)$.
- $+\infty$ környezetei: $(K, +\infty)$.
- $+\infty$ pontozott környezetei: $(K, +\infty)$.
- $-\infty$ környezetei $(-\infty, K)$.
- $-\infty$ pontozott környezetei $(-\infty, K)$.

A $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ függvényhatárérték esetei:

β \ α	$-\infty$	$a-0$	$a \in \mathbb{R}$	$a+0$	$+\infty$
$-\infty$	15	9	3	6	12
$b \in \mathbb{R}$	13	7	1	4	10
$+\infty$	14	8	2	5	11

A táblázat megfelelő celláihoz tartozó definíciók az alábbiak (nem az $a, b, \varepsilon, \delta, K, L$ betűk a lényegesek, hanem a mögöttes tartalom. Vizsgán a megértést könnyen tudom tesztelni azzal, ha más betűkkel, vagy egyszerűen csak egy konkrét esetben kérem a definíció felírását.)

1. Az f függvény értelmezve van az a pont egy pontozott környezetében és
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x (0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon).$$
2. Az f függvény értelmezve van az a pont egy pontozott környezetében és
$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x (0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > K).$$
3. Az f függvény értelmezve van az a pont egy pontozott környezetében és
$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x (0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < K).$$
4. Az f függvény értelmezve van az a pont egy pontozott jobb oldali környezetében és
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x (a < x < a + \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon).$$
5. Az f függvény értelmezve van az a pont egy pontozott jobb oldali környezetében és
$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x (a < x < a + \delta \implies f(x) > K).$$

6. Az f függvény értelmezve van az a pont egy pontozott jobb oldali környezetében és

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x (a < x < a + \delta \implies f(x) < K).$$

7. Az f függvény értelmezve van az a pont egy pontozott bal oldali környezetében és

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x (a - \delta < x < a \implies |f(x) - b| < \varepsilon).$$

8. Az f függvény értelmezve van az a pont egy pontozott bal oldali környezetében és

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x (a - \delta < x < a \implies f(x) > K).$$

9. Az f függvény értelmezve van az a pont egy pontozott bal oldali környezetében és

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x (a - \delta < x < a \implies f(x) < K).$$

10. Az f függvény értelmezve van a $+\infty$ egy pontozott környezetében és

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}\ \forall x (x > K \implies |f(x) - b| < \varepsilon).$$

11. Az f függvény értelmezve van a $+\infty$ egy pontozott környezetében és

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists L \in \mathbb{R}\ \forall x (x > L \implies f(x) > K).$$

12. Az f függvény értelmezve van a $+\infty$ egy pontozott környezetében és

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists L \in \mathbb{R}\ \forall x (x > L \implies f(x) < K).$$

13. Az f függvény értelmezve van a $-\infty$ egy pontozott környezetében és

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}\ \forall x (x < K \implies |f(x) - b| < \varepsilon).$$

14. Az f függvény értelmezve van a $-\infty$ egy pontozott környezetében és

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists L \in \mathbb{R}\ \forall x (x < L \implies f(x) > K).$$

15. Az f függvény értelmezve van a $-\infty$ egy pontozott környezetében és

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists L \in \mathbb{R}\ \forall x (x < L \implies f(x) < K).$$

A következő példák szerepeltek definíció szerinti bizonyítással (az $a, b \in \mathbb{R}$ esetre már múltkor néztünk példákat):

- Végtelen határérték adott pontban:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$$

- Féloldali határérték adott pontban:

$$\lim_{x \to 0+} \{x\} = 0, \quad \lim_{x \to 0-} \{x\} = 1, \quad \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

- Végtelenben vett határérték

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$