Egyváltozós analízis 1 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 3. félév, 2015. ősz

4. előadás (szeptember 30.)

Az átviteli elvvel kezdtünk, újra felírtam a folytonosságra vonatkozó változatát. Ha f értelmezve van az a pont egy környezetében, akkor f pontosan akkor folytonos a-ban, ha $x_n \to a$ esetén $f(x_n) \to f(a)$. Az átviteli elv tehát sorozatok határértékére viszi át a folytonosság fogalmát. Alkalmazásképpen igazoltuk, hogy az $\{x\}$ függvény nem folytonos a 0 pontban, hiszen az $x_n = -1/n$ választással $x_n \to 0$, de $\{x_n\} = 1 - \frac{1}{n} \to 1 \neq 0$. Másik példaként az $[x]$ függvényt tekintettük a 2 pontban. Mivel $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ választással $x_n \to 2$ és $[x_n] = 1 \not\to 2 = [2]$, ezért az $[x]$ függvény nem folytonos a 2 pontban. Megjegyeztem, hogy az átviteli elvet a jobb és bal oldai folytonosságra is megfogalmazhatjuk, mintaképpen a jobb oldali folytonosságra vonatkozó esetet írtam fel. Ha f értelmezve van az a pont egy jobb oldali környezetében, akkor f pontosan akkor jobbról folytonos az a-ban, ha minden olyan $x_n \to a$ sorozatra, amelyre $x_n \geq a$, következik, hogy $f(x_n) \to f(a)$. Házi feladat megfogalmazni a bal oldali folytonosságra vonatkozó átviteli elvet.

Ezután az átviteli elv következményeit tárgyaltuk. Ha f, g folytonosak a-ban, akkor $f + g$, $f - g$, fg is folytonosak a-ban, továbbá $g(a) \neq 0$ esetén f/g is. A bizonyítás az átviteli elvet, valamint a sorozathatárérték és algebrai műveletek kapcsolatát használja. Egyedül a hányados esetében szükséges egy picit többet meggondolni, méghozzá azt, hogy ha $g(a) \neq 0$ és g folytonos a-ban, akkor egy egész környezetben $g \neq 0$. Ezt a későbbiekben többször is előkerülő eredményt lemmaként mondtam ki és a folytonosság definíciójának (és a háromszög-egyenlőtlenség második változatának) segítségével igazoltuk. Az iménti folytonossági tétel következménye a polinomok és racionális törtfügvények folytonossága az értelmezési tartományukon.

Rátértünk ezután a függvényhatárérték témakörére. Néhány grafikont felrajzoltam, hogy szemléltessem, miért is lesz 15 féle esete ennek a fogalomnak. Egy másik motivációként az érintő fogalmát próbáltam illusztrálni, mint húrok „határhelyzetét” és az érintő meredekségét, mint a meredekségek „határértékét”. Ez majd később a differenciálszámításnál lesz tisztázva, de ehhez szükséges a függvényhatárérték fogalma.

Először az adott pontbeli véges határértékkel foglalkoztunk. A pontozott környezet fogalmát vezettük be, ez az $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ halmaz. Ha az f függvény értelmezve van az a pont egy pontozott környezetében, akkor az f függvény határértéke az a pontban a $b \in \mathbb{R}$ szám, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x (0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon).$$

A folytonossághoz képest a fő különbség, hogy az a pontbeli függvényérték lényegtelen, sőt az is, hogy egyáltalán értelmezve van-e ott a függvény. Bevezettem a $\lim_{x \to a} f(x) = b$, vagy $\lim_a f = b$, vagy $f(x) \to b$ $(x \to a)$ jelöléseket. Első példaként azt igazoltuk, hogy ha $f(x) = 0$ $(x \neq 0)$ és $f(0) = 1$, akkor $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Második – komolyabb – példaként megmutattuk, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{(x-1)(x-3)}, & \text{ha } x \neq 1, x \neq 3, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

módon értelmezett függvényre $\lim_{x \to 1} f(x) = -\frac{1}{2}$. Másrészt azt is beláttuk definíció alapján, hogy nincs olyan $b \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $\lim_{x \to 3} f(x) = b$ lenne (ehhez a háromszög-egyenlőtlenség második változatát is használtuk).

Az óra végén rátértünk az adott pontbeli végtelen határértékre, ennek a definíciójával zártam az előadást. Legyen az f függvény értelmezve az $a \in \mathbb{R}$ pont egy pontozott környezetében. Ekkor az f függvény határértéke az a pontban $+\infty$, ha

$$\forall K \in \mathbb{R} \; \exists \delta > 0 \; \forall x (0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > K).$$