Egyváltozós analízis 1 előadás

Osztatlan matematikatanár szak 3. félév, 2015. ősz

2. előadás (szeptember 15.)

A mai előadás témája a konvex és konkáv függvények voltak. Mindent csak a konvex esetben mondtunk ki, mert ebből a konkáv függvényekre vonatkozó eredmények könnyen adódnak a konkávitás definíciójának segítségével. A grafikus motiváció után konvexnek neveztünk egy függvényt egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha az intervallum bármely $a < b$ pontjai esetén esetén minden $a < x < b$ közbülső pontra $f(x) \leq h_{a,b}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$. (Szemléletesen „a grafikon a húr alatt fekszik az (a, b) intervallumon".) Egy függvényt konkávnak hívunk, ha $(-f)$ konvex, vagyis az előző definícióban az $f(x) \geq h_{a,b}(x)$ módosítást kell végrehatjani. Szigorúan konvex, illetve szigorúan konkáv egy függvény, ha az iménti egyenlőtlenségekben szigorú egyenlőtlenség érvényes.

Ezután példaképpen ellenőriztük (ami szemléletesen világos), hogy az x^2 függvény konvex $\mathbb{R}$-en és az $1/x$ függvény konvex $\mathbb{R}^+$-on. Az is világos, hogy bármely lineáris függvény egyszerre konvex és konkáv is $\mathbb{R}$-en.

Egy kis grafikus motiváció után kimondtuk a Jensen-egyenlőtlenséget. Ha f konvex az I intervallumon, akkor bármely $a < b \in I$ és $0 < t < 1$ esetén

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

A $ta + (1-t)b$ kifejezést az a, b pontok konvex kombinációjaként szokás emlegetni. A Jensen-egyenlőtlenség bizonyítása a konvexitás definícióján múlik, egyszerűen az $x = ta + (1-t)b$ pontra kell alkalmazni (persze kérdés, hogy valóban $a < x < b$). Ezután megjegyeztem, hogy az előzőekben valójában sehol nem lényeges, hogy $a < b$, mert $h_{a,b}(x) = h_{b,a}(x)$ (bár ránézésre különbözőek). Mindezek után kimondtam az általános Jensen-egyenlőtlenséget: ha $a_1, \dots a_n \in I$ és $0 < t_1, \dots, t_n < 1$, $t_1 + \dots + t_n = 1$, akkor

$$f(t_1 a_1 + \dots + t_n a_n) \leq t_1 f(a_1) + \dots + t_n f(a_n).$$

Az indukciós bizonyításnak az egyszerűség kedvéért csak azt a speciális esetét néztük meg, amikor az $n = 2$-ről $n = 3$-ra való áttérés van (az általános eset hasonló, csak többet kell írni és könnyebb belekavarodni). Megemlítettem, hogy szigorúan konkáv esetben, ha az $a_1, \dots, a_n$ számok nem mind egyenlőek, akkor szigorú az egyenlőtlenség.

A Jensen-egyenlőtlenségnek az x^2 függvényre való alkalmazásaként megkaptuk a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget, valamint az $1/x$ függvényre való alkalmazásaként a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget.

Az óra maradék részében a konvexitás egy ekvivalens átfogalmazását tárgyaltuk. Az f konvex az I intervallumon, ha minden $a \in I$ esetén az $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ meredekségfüggvény monoton növő az $I \setminus \{a\}$ halmazon. A bizonyítás ismét csak a konvexitás eredeti definícióját használja. Végül alkalmazásképpen igazoltuk, hogy az x^n függvény konvex $\mathbb{R}^+$-on minden n pozitív egész esetén.