All (átírás másik alapra)

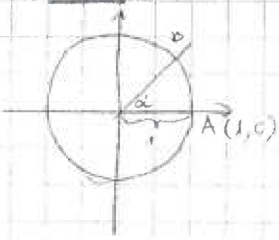
$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$, ha $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ és $x > 0$

(bármely két log fv konstans szorzóban tér el egymástól)

Biz: hasonlóan, mint előző azonosságot

Trigonometrikus függvények

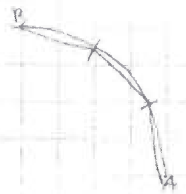
Msz: szükséges ívmérték precíz bevezetése



α szög ívmértéke az $\overset{\frown}{AB}$ ív hossza

? ez mi ? - nem triviális

ötlet: töröttvonallal közelítjük

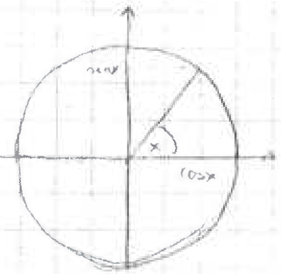


Az osztópontok növelésével a beírt töröttvonal hossza nő

Értelmező: a beírt töröttvonalak hosszainak szuprémuma legyen az ív hossza

π valójában az egység sugarú félkörív ívhossza

Ezek után sin, cos bevezetése:



x hosszú ívet felmérjük az $(1,0)$ pontból az egységkörre, így kapjuk a B pontot az egységkörvonalon, ennek koordinátái $(\cos x, \sin x)$

Mindent használhatunk, amit középiskolában tanultunk.

Differenciálszámítás

Elnevezés: az x pontbeli különbségi hányados-fv. (differencia hányados-fv.)

1) **Def**: Legyen $a \in \mathbb{R}$, f az „a" egy környezetében értelmezve. Az f differenciálható (deriválható) az „a" pontban, ha $\exists \lim\limits_{x \to a} \boxed{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}$ és $\boxed{\text{véges}}$. Ezt az f $\boxed{\text{deriváltjának}}$ nevezzük a-ban, jele $f'(a)$

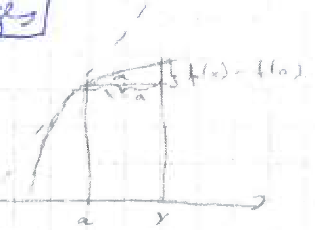
más szóval: differenciálhányados

negyedik lényeges, pl. $\sqrt[3]{x}$, $a = 0$ a limesz $\exists$, de nem véges

(Alternatív jelölések $\dfrac{df}{dx}(a)$, $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=a}$)

Motiváció: (1) sebesség $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$

(2) görbe érintője $f'(a)$ az érintő meredeksége



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Def: Legyen f differenciálható a-ban. Az f grafikonjának érintője az $(a, f(a))$ pontban az $y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ egyenletű egyenes. (mert ez átmegy $(a, f(a))$-n és meredeksége $f'(a)$)

Alternatív képlet (néha hasznos) $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ($h = x - a$ -t használom)

Példák $f(x)=c \quad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall a\in\mathbb{R} \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0 \quad \dots \quad \exists \lim \Rightarrow f'(a)=0 \quad \forall a$

$f(x)=x \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{x-a}{x-a}=1$ és $\exists \lim \Rightarrow f'(a)=1 \quad \forall a$

$f(x)=x^2 \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}$ és $\exists \lim_{x\to a}(x+a)=2a$

$f(x)=x^n \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+\dots+a^{n-1}$

emlékezzünk: $x^n-a^n=(x-a)(\underbrace{x^{n-1}+a\cdot x^{n-2}+\dots+a^{n-1}}_{n\text{ db}})$

és $\exists \lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+\dots+a^{n-1})=n\cdot a^{n-1}$

$\Downarrow \forall$ tag tart a^{n-1}

folyt. fv. x helyére a-t írunk

ha f folyt. „a"-ban akkor $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\Rightarrow f'(a)=n\cdot a^{n-1}$

$f(x)=\sqrt{x} \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$

[ld. gyak.]

mert $\sqrt{x}$ folyt. $\to \frac{1}{2\sqrt{a}}$, ha $a>0$

$f(x)=|x| \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{|x|-|a|}{x-a}$

$a>0 \Rightarrow x>0$: $\frac{x-a}{x-a}=1 \Rightarrow \exists \lim 1=1 \Rightarrow f'(a)=1$

$a<0 \Rightarrow x<0$: $\frac{-x+a}{x-a}=-1 \Rightarrow \exists \lim -1=-1 \Rightarrow f'(a)=-1$

$a=0$: $\frac{|x|}{x}$ nem $\exists$ lim, ugyanis $\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0+0} f(x)=1$, $\lim_{x\to 0-0} f(x)=-1$ $\Downarrow$ $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$

Különben a bal és jobb o. limeszeknek meg kellene, hogy egyezzen

Nem deriválható f az $a\in\mathbb{R}$ pontban, ha a f fv. grafikonjának az a pontban töréspontja van

Tétel: Ha f differenciálható a-ban $\Rightarrow$ folytonos is a-ban

Biz: $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right)=f'(a)\cdot 0=0$

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \Leftrightarrow f$ folyt. a-ban

Megj.: f folyt $\not\Rightarrow f$ differenciálható. Nem pl. $f(x)=|x|$, $a=0$

Van olyan folyt. fv, mely egyetlen pontban sem differenciálható

Tétel: f differenciálható a-ban $\Leftrightarrow \exists\, \alpha\in\mathbb{R}$ és r fv, hogy $f(x)=\underbrace{f(a)+\alpha(x-a)}_{\text{lineáris fv.}}+\underbrace{r(x)(x-a)}_{\text{maradéktag}}$

és $\lim_{x\to a} r(x)=0$, ill. $\alpha=f'(a)$

jelentése: f az „a" pont környezetében olyan jól közelíthető egy lineáris fv.-nyel, hogy a maradéktag $(x-a)$-val leosztva is 0-hoz tart.

Biz. $\Rightarrow$ legyen $\alpha=f'(a)$ és $r(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)$

$\lim_{x\to a} r(x)=f'(a)-f'(a)=0$

$\Leftarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(\alpha+r(x))=\alpha \Rightarrow$ deriválható a-ban és $f'(a)=\alpha$

Derivált fv. értelmezése — mi a f'?

Def: Legyen $I\subset\mathbb{R}$ nyílt intervallum. Legyen $f: I\to\mathbb{R}$ differenciálható $\forall$ pontjában. Ekkor f derivált fv-e az az $f': I\to\mathbb{R}$ fv, amire $f'(x)=f'(x)$.

fv.; pont $=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Például $f(x) = x^2 \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Hogyan értelmezzük f' fv-t zárt intervallumon?

Mint tudjuk ezt meg: A baj a végpontban van, ahol a differenciálhatóság def. lehet

Def. Legyen $I = [a, b]$ zárt intervallum $f: I \to \mathbb{R}$. f jobbról diffható a-ban, ha

$\exists \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ és véges. Ekkor f jobboldali deriváltja a-ban. $f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Def (bal oldali derivált b-ben

$$f'_-(b) = \lim_{x \to b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Def Legyen $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum $f: I \to \mathbb{R}$ diffható belül ((a,b) nyíltban) és balvégpontban jobbról, jobbvég pontban balról diffható. Ekkor f-et az I-n differenciálhatónak nevezzük. f derivált fv-e $f': I \to \mathbb{R}$

Elemi fv-ek deriváltja és deriválási szabályok

Hatványok. $f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

később $f(x) = x^\alpha \quad \alpha = \frac{1}{2}, \alpha = -1$ egyszerű HF

$\alpha = \frac{1}{2}$ előbb volt

$\alpha = -1 \quad \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = -\dfrac{1}{xa} \xrightarrow{x \to a} -\dfrac{1}{a^2}$

Trigonometrikus függvények

$\sin$ deriváltja $a = 0$-ban $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

ez abból jön ki:

$x < 0$ $\boxed{\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1}$ $\xrightarrow{\text{Rendőr-elv}}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ez geometria

elég $x > 0$ esetén, mert x-ben páros minden oldal

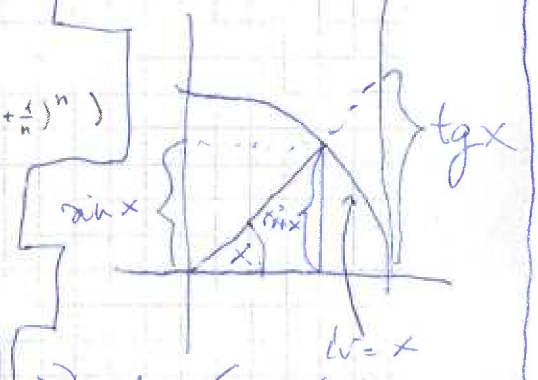
$\frac{\sin x}{\cos x} > x$, mert $\operatorname{tg} x > $ ív rajz

Fontos limeszek

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ ez geometria

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$x > 0$



$\Rightarrow \sin x \le x \le \operatorname{tg} x$

Most a 2. és 3. levezetése (visszamegy e def.-jére $e = \lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$)

2.: e-ről tudjuk ezt is $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{b}{x})^x = e^b$

$b = 1$-re alkalmazzuk és vesszük az $\ln$-jét

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln(1 + \frac{1}{x})^x = 1$ Kompozíció fv limesz
$\quad \| \quad$ $\log e$

külső fv. (log) folyt. és belsőnek van limesze

$y = \frac{1}{x}$ helyettesítéssel

$$\lim_{y \to 0 \pm 0} \ln (1+y)^{\frac{1}{y}} = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{1}{y} \cdot \ln (1+y) = 1$$

kompozíció fv. limesze — (melyik a külső és melyik a belső?)

$$\boxed{\begin{array}{l} x \to \infty \Rightarrow y \to 0+0 \\ x \to -\infty \Rightarrow y \to 0-0 \end{array}}$$

3. következmény

$\ln(1+x) =: z \iff x = e^z - 1$

$$\overset{\text{előző}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1} \overset{\text{reciprok}}{\Longrightarrow} \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

Ezeket használom a deriváltak kezelésénél

Áll. Az $f(x) = e^x$ fv diff-ható $\forall$ pontban és $f'(x) = e^x$ (Könyvben máshogy biz.)

Biz. $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

előző (2) → 1

Áll. Az $f(x) = \ln x$ fv differenciálható $\forall$ pontban $(x>0)$ és $f'(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x > 0$.

Biz.: $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(1 + \frac{h}{x}\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}$$

előző köv. (3) + összetett fv. limesz (melyik a belső és melyik a külső?)

Áll.: A sin és cos fv. $\forall$ pontban deriválható és $\sin' = \cos$ és $\cos' = -\sin$

Biz.: $$\sin'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) = \cos x$$

$\frac{\cos h - 1}{h} \to 0$ meg kell; $\frac{\sin h}{h} \to 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h \to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h \to 0} \left(\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{-\sin h}{\cos h + 1}}_{\to 0} \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

$\cos'(x)$ HF

Végig csinálni!

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \cos x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\downarrow h \to 0 \atop 0} - \sin x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\downarrow h \to 0 \atop 1} \xrightarrow{h \to 0} -\sin x$$

Deriválási szabályok

<u>Tétel:</u> Legyen f és g deriválható a-ban és legyen $c \in \mathbb{R}$ akármi. Ekkor $c \cdot f$, $f+g$, $f \cdot g$ és $\frac{f}{g}$ (ha $g \neq 0$) is deriválható a-ban és $(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$, $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$

<u>Biz.:</u> • $F(x) = c \cdot f(x)$

$c \cdot f$ eset: $\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(a)}{x-a} = c \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to c \cdot f'(a)$, ha $x \to a$

limesz és műveletek

• $f+g$ eset, legyen $F(x) = f(x) + g(x)$

$$\Rightarrow \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \frac{f(x)+g(x) - (f(a)+g(a))}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow[\text{ha } x \to a]{} f'(a) + g'(a)$$

• $f \cdot g$ eset, legyen $F(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\Rightarrow \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} =$$

$$= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to g(a), \text{ mert } g \text{ folyt. is}} + f(a) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow[\text{ha } x \to a]{} f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

⇐ g diffható a-ban

$$\Rightarrow F'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

• $\frac{f}{g}$ eset, legyen $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\Rightarrow \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a} =$$

$$= \frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{x-a} =$$

$$= \frac{1}{g(x)g(a)} \left(\frac{f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x-a} - \frac{f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \right) =$$

$$= \frac{1}{\underbrace{g(x)g(a)}_{g(x) \to g(a), \text{ mert } g \text{ folyt. is}}} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot g(a) - \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \cdot f(a) \right) \xrightarrow[\text{ha } x \to a]{} \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

⇐ g diffható a-ban

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{f'(a)g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

<u>Tétel (Kompozíció fv deriváltja):</u> $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Legyen g deriválható a-ban és f deriválható $g(a)$-ban. Ekkor $f \circ g$ is deriválható a-ban és

$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

<u>Biz.:</u> Legyen $h = f \circ g$ $\quad \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x)-g(a)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \to$

(igaz, ha $g(x) \neq g(a)$-val az a egy környezetében)

$\to f'(g(a)) \cdot g'(a)$, ha $x \to a$

összetett fv. limesz kell
(melyik a külső és melyik a belső?)

Ha $g(x)$ lehet $g(a)$ közel is $\Rightarrow$ mi van?

Legyen $F(t) = \dfrac{f(t) - f(g(a))}{t - g(a)}$, ha $t \neq g(a)$ és
$F(g(a)) = f'(g(a))$, ha $t = g(a)$ } F folyt. fv $g(a)$-ban, hiszen f diffható $g(a)$-ban

Ekkor $\dfrac{h(x) - h(a)}{x - a} = F(g(x)) \cdot \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$ ezt most igazolom

két eset: 1. $g(x) \neq g(a) \Rightarrow F(g(x)) = \dfrac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)}$ ekkor első helyett

$\Rightarrow \dfrac{h(x) - h(a)}{x - a} = F(g(x)) \cdot \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$

összetett fv - határértéke
F flds. $g(a)$-ban, g fdyt. a-ban

2. $g(x) = g(a) \Rightarrow$ azért egyenlő (amit igazoltunk), mert mindkettő 0.

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} F(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Példák és egyben elemi fv-ek deriváltjai

1. $\operatorname{tg}(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ deriváltja: $\operatorname{tg}'(x) = \dfrac{\sin'(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \cos'(x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{1}{\cos^2 x}$

2. $\operatorname{ctg}(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ deriváltja: $\operatorname{ctg}'(x)$ HF

3. $x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$

$f(x) = x^\alpha \Rightarrow f'(x) = e^{\alpha \cdot \ln x} \cdot \alpha \cdot \dfrac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \dfrac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$
összetett fv.

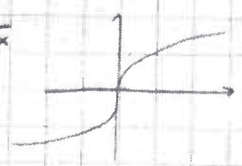
Vigyázat! $x = 0$-ban baj, ha $\alpha < 1$

Pl.: $\sqrt{x}$ a 0-ban nem deriválható jobbról

fontos még: $a > 0$, $a \neq 1$
$(a^x)' = \left(e^{x \log a}\right)' = \log a \cdot e^{x \log a} = \log a \cdot a^x$
$(\log_a x)' = \left(\dfrac{\log x}{\log a}\right)' = \dfrac{1}{\log a} \cdot \dfrac{1}{x}$

A könyvben derivált $= \infty$ fogalma is benne van $\Leftrightarrow$ az érintő függőleges

$\sqrt[3]{x}$



0-ban a deriváltja ∞

Nem differenciálható 0-ban! — teszt vizsgadolgozati vagy gyak

$\dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{x \to 0} +\infty$
nevező $\to 0+0$

Inverz fv differenciálhatósága

Legyen $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton (tehát injektív) és $\exists f^{-1}$

Ötlet: $f(f^{-1}(x)) = x$ ha tudnám, hogy f^{-1} differenciálható

$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'x = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Kizárjuk $(f^{-1})'$ létezését

Tétel: Legyen az $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ szig. mon. és folytonos. Ha f differenciálható egy $c \in (a, b)$ pontban és $f'(c) \neq 0$

$\Rightarrow f^{-1}$ differenciálható az $f(c)$ pontban és $(f^{-1})'(f(c)) = \dfrac{1}{f'(c)}$

<u>Biz.</u> Jelölje $\varphi = f^{-1}$ – ennek kell a deriválhatósága

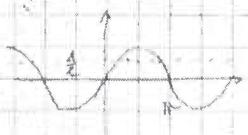
Nézzük ezt: $\dfrac{\varphi(y) - \varphi(f(c))}{y - f(c)} = \dfrac{\varphi(y) - c}{\underbrace{f(\varphi(y))}_{y} - f(c)} = \dfrac{1}{\dfrac{f(\varphi(y)) - f(c)}{\varphi(y) - c}} \xrightarrow{y \to f(c)} \dfrac{1}{f'(c)}$

az összetett fv limesze,
$\varphi(y) \neq c$ az $f(c)$ egy pontozott környezetében

<u>Például:</u> arc sin deriváltja

$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ inverze szig mon növő

<u>Trigonometrikus függvények inverzei</u>



ez nem injektív kérdés: $\sin x = \frac{1}{2}$ $x = ?$

önkényesen azt az x-t választom, amire $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

letörlöm a többi részt, ennek van tudományos neve: fv leszűkítése, megszorítása

Def.: Legyen $f: A \to B$ fv (akármi), legyen $C \subset A$ egy részhalmaz. $f|_C: C \to B$ az a fv, ami a C halmazon van értelmezve és ott megegyezik f-fel $f|_C(x) = f(x)$, ha $x \in C$. Ezt nevezzük az f leszűkítésének a C halmazra

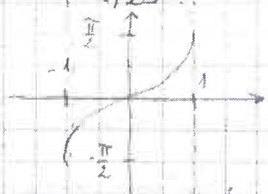
Vissza a sin-hoz

ejtsd: arkusz (esetleg árkusz) szinusz

A $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ szigorúan nő, tehát injektív, ezért van inverze

Def.: A $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ fv inverzét $\boxed{\arcsin}$ fv-nek nevezzük, $\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$

$\arcsin: [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Grafikon: tükrözés $y = x$-re



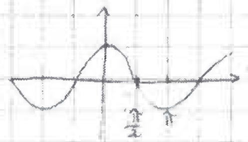
pl.: $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, mert $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

HF: $\arcsin 1 = ?$, $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = ?$, $\arcsin -\frac{1}{2} = ?$

$\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = ?$

gondold végig! javasolt kérdés?
$\sin(\arcsin \frac{1}{2}) = ?$
$\arcsin(\sin 3\pi) = ?$

<u>Koszinusz fv</u>



A koszinusz fv szig. fogyó $[0, \pi]$-n, tehát ott injektív (önkényes)

Def.: A $\cos|_{[0, \pi]}$ fv inverzét arc cos fv-nek nevezzük $\arccos = \left(\cos|_{[0, \pi]}\right)^{-1}$,

$\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi]$