

Minden feladat 1 pontot ér, de csak teljes **indoklással**. Részpontoszám is kapható. Ha egy megoldásban súlyos hiba van, a megoldásra akkor is nulla pontot adunk, ha a megoldásnak vannak helyes részei is. A dolgozat értéke osztályzatban körülbelül 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál. Az előadáson kimondott tételek és a gyakorlatokon bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Tétel volt előadáson, hogy...” vagy „Gyakorlaton bizonyítottuk, hogy...”), kivéve, ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása. A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

Semmilyen segédeszköz nem használható, számológép sem ! Mobiltelefon nem lehet az asztalon, mobiltelefont használni tilos !

- Legyen $f(x) = \{x\} \cdot [x]$, és legyen $a_n = n + \frac{1}{2}$, valamint $b_k = k$, ahol $k, n \in \mathbb{N}$. Adjuk meg az $f(a_n)$ és $f(b_k)$ sorozatokat! Számítsuk ki az $(f(a_n))$ és $(f(b_k))$ sorozatok határértékét! Létezik-e a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ határérték, és ha igen, akkor mivel egyenlő?
- Adjuk meg a $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x^2 - 4}$ határértéket, és állításunkat bizonyítsuk be közvetlenül a határérték definíciójából!
- Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények. Mi a logikai kapcsolat az alábbi állítások között?
P: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$
Q: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ vagy $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$
- Számítsuk ki a következő határértéket!
(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+100} + 3^{-x}}{x^{300} + 5}$
(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt[7]{7x + x^7}}$
- Bizonyítsuk be, hogy ha $f : [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $(\forall x \in [1,2]) f(x) > 0$, akkor $(\exists c > 0)(\forall x \in [1,2]) f(x) > c$.
- Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növekvő, és hogy az $(f(n))$ sorozat határértéke végtelen. Következik-e ebből, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$?
- Számítsuk ki az $f(x) = \frac{1}{x-2}$ függvény deriváltját a definíció szerint az $a = 3$ pontban!