Egyváltozós analízis 1, 2014. ősz, 1. zh

Tudnivalók. Minden feladat 1 pontot ér, de csak teljes **indoklással**. Részpontszám is kapható, de súlyos hibát tartalmazó megoldásra nulla pontot adunk, még ha a megoldásnak vannak helyes részei is. A dolgozat értéke osztályzatban kb. 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál. A gyakorlatokon és előadáson bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Gyakorlaton/előadáson bizonyítottuk, hogy...”), kivéve ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása. A feladatok nem nehézségi sorrendben következnek. A megoldásra 90 perc áll rendelkezésre.

Semmilyen segédeszköz nem használható, **számológép sem**! **Mobiltelefon nem lehet az asztalon, mobiltelefont használni tilos!** Jó munkát!

---

1. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, akkor mennyi az összegük?

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot 3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{3^n}$

2. Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ sor, és ha igen, akkor mennyi az összege?

3. Legyen $f\colon [-1,\infty) \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2 + x + 1$. Injektív-e, szürjektív-e az f függvény?

4. Konvex-e, konkáv-e az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ függvény a $(0,\infty)$-en? Igaz-e, hogy $\dfrac{1}{\sqrt{10}} + \dfrac{1}{\sqrt{20}} > \dfrac{2}{\sqrt{15}}$?

5. Definíció szerint (azaz ε-hoz δ-t megadva) igazoljuk az $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ függvény folytonosságát az $x = 1$ pontban!

6. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $f(1) = 0$ és f nem folytonos az 1 pontban. Következik-e ebből, hogy

   (a) van olyan (x_n) sorozat, amelyre $x_n \to 1$ és $f(x_n) \to 0$?

   (b) van olyan (x_n) sorozat, amelyre $x_n \to 1$ és $f(x_n) \not\to 0$?

   (c) van olyan (x_n) sorozat, amelyre $x_n \to 1$ és $f(x_n) \to 1$?

7. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x = a$ pontban, akkor az $f + g$ függvény is folytonos $x = a$-ban!

Egyváltozós analízis 1, 2014. ősz, 1. zh

Tudnivalók. Minden feladat 1 pontot ér, de csak teljes **indoklással**. Részpontszám is kapható, de súlyos hibát tartalmazó megoldásra nulla pontot adunk, még ha a megoldásnak vannak helyes részei is. A dolgozat értéke osztályzatban kb. 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál. A gyakorlatokon és előadáson bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Gyakorlaton/előadáson bizonyítottuk, hogy...”), kivéve ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása. A feladatok nem nehézségi sorrendben következnek. A megoldásra 90 perc áll rendelkezésre.

Semmilyen segédeszköz nem használható, **számológép sem**! **Mobiltelefon nem lehet az asztalon, mobiltelefont használni tilos!** Jó munkát!

---

1. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, akkor mennyi az összegük?

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot 3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{3^n}$

2. Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ sor, és ha igen, akkor mennyi az összege?

3. Legyen $f\colon [-1,\infty) \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2 + x + 1$. Injektív-e, szürjektív-e az f függvény?

4. Konvex-e, konkáv-e az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ függvény a $(0,\infty)$-en? Igaz-e, hogy $\dfrac{1}{\sqrt{10}} + \dfrac{1}{\sqrt{20}} > \dfrac{2}{\sqrt{15}}$?

5. Definíció szerint (azaz ε-hoz δ-t megadva) igazoljuk az $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ függvény folytonosságát az $x = 1$ pontban!

6. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $f(1) = 0$ és f nem folytonos az 1 pontban. Következik-e ebből, hogy

   (a) van olyan (x_n) sorozat, amelyre $x_n \to 1$ és $f(x_n) \to 0$?

   (b) van olyan (x_n) sorozat, amelyre $x_n \to 1$ és $f(x_n) \not\to 0$?

   (c) van olyan (x_n) sorozat, amelyre $x_n \to 1$ és $f(x_n) \to 1$?

7. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x = a$ pontban, akkor az $f + g$ függvény is folytonos $x = a$-ban!