Függvénysorok előadásjegyzet

Simon L. Péter

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Alkalmazott Analízis és Számításimatematika Tanszék,

E-mail: simonp@cs.elte.hu

2017. május 6.

1. Bevezetés

A jelen jegyzet a Függvénysorok című előadás első részének anyagát tartalmazza.

2. Fourier sor absztrakt megközelítése

Legyen H egy vektortér, amelyen adott egy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzat.

1. Definíció. Egy $\{e_1, e_2, \dots\} \subset H$ vektorhalmazt ortogonális rendszernek nevezünk, ha $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ minden $i \neq j$ esetén. Egy ortogonális rendszert ortonormáltnak nevezünk, ha $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ minden i esetén. A vektorrendszert teljesnek nevezzük, ha $\langle x, e_i \rangle = 0$ csak akkor teljesülhet minden i esetén, ha $x = 0$.

Megjegyezzük, hogy a vektorhalmaz véges is lehet, de a jelen jegyzetben a megszámlálhatóan végtelen esettel foglakozunk.

2. Definíció. Legyen $\{e_1, e_2, \dots\} \subset H$ ortonormált rendszer. Egy $x \in H$ vektor általánosított Fourier-együtthatói az $x_i = \langle x, e_i \rangle$ számok, az x általánosított (formális) Fourier-sora $\sum x_i e_i$.

Vegyük észre, hogy ez a fogalom a véges dimenziós eset általánosítása, amikor egy $x \in \mathbb{R}^n$ vektort egy $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormált bázisban az $x_i = \langle x, e_i \rangle$ koordinátái segítségével $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ alakban állítunk elő.

Ebben a jegyzetben azzal a végtelen dimenziós esettel foglalkozunk, amikor a H vektortér egy függvénytér. A kérdés az, hogy milyen értelemben konvergál a Fourier-sor, illetve, hogy összege megegyezik-e az x vektorral, amelyből előállítottuk. A klasszikus motiváció ehhez egy adott függvény közelítése egyszerűbb függvények sorozatával, melyre a legegyszerűbb példa a Taylor-sor, amikor polinomokkal szeretnénk egy függvényt közelíteni, illetve a klasszikus Fourier-sor, amikor trigonometrikus függvényekből álló sor alakjában keressük a közelítést.

A függvénysor konvergenciájára háromféle lehetőséget fogunk vizsgálni: a pontonkénti, az egyenletes, valamint az L_2 konvergenciát. Az utóbbihoz a függvények egy mértéktéren való értelmezése lesz szükséges. A továbbiakban először levezetünk néhány azonosságot, amelyhez a függvénytérnek csak a vektortér struktúráját és a skalárszorzat tulajdonságait használjuk. Ezt nevezzük algebrai megközelítésnek. Ezután következik a funkcionálanalitikus megközelítés, melynek során feltételezzük, hogy a függvénytér teljes a skalárszorzat által generált normával. Ezt követően tárgyaljuk a klasszikus Fourier-sorfejtést, amikor mind a függvénytér, mind az ortogonális rendszer speciális alakú. Ebben az esetben a normakonvergencián kívül a pontonkénti és egyenletes konvergenciát is vizsgáljuk.

2.1. Elemi algebrai tulajdonságok

Legyen tehát H egy vektortér, amelyen adott egy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzat. Értelmezzük a H téren a skalárszorzat által generált normát a szokásos módon az $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ egyenlőséggel. Legyen $\{e_1, e_2, \ldots\} \subset H$ ortonormált rendszer. Adott $x \in H$ esetén a Fourier-együtthatók az $x_i = \langle x, e_i \rangle$ számok, a Fourier-sor részletösszeg sorozata legyen

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Az alábbi két állítás elemien következik a skalárszorzat tulajdonságaiból.

1. Állítás. *Tetszőleges $x \in H$, $n \in \mathbb{N}$ és $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén fennáll $\langle x - s_n, e_j \rangle = 0$.*

2. Állítás. *Tetszőleges $x \in H$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll $\langle x - s_n, s_n \rangle = 0$.*

Felhasználva ezt a két állítást valamint az $x = x - s_n + s_n$ triviális azonosságot az alábbit kapjuk.

3. Állítás. *Tetszőleges $x \in H$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll $\|x\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \|s_n\|^2$.*

Szintén a skalárszorzat tulajdonságaiból következik az alábbi.

4. Állítás. *Tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ esetén fennáll $\langle s_n, s_m \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$.*

Az előző két állításból egyszerűen kapjuk a Bessel-egyenlőtlenséget.

1. Tétel (Bessel-egyenlőtlenség ortonormált rendszerre). *Tetszőleges $x \in H$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \|x\|^2.$$

Ortogonális rendszert a Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció segítségével lehet előállítani, melyet később tárgyalunk.

2.2. A Fourier-sor normabeli konvergenciája Hilbert-térben

Ezen a ponton az elemi algebrai megközelítésen túllépve tételezzük fel, hogy H Hilbert-tér, azaz a skalárszorzat által indukált normával teljes. Valamint az $\{e_1, e_2, \ldots\} \subset H$ ortonormált rendszerről is tegyük fel, hogy teljes. (Vigyázzunk, a teljesség szót itt két teljesen eltérő értelemben használjuk.) A sor konvergenciájának igazolásához szükségünk lesz az alábbi, még algebrai állításra.

5. Állítás. *Adott $x \in H$ esetén legyen $\sigma_n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. Tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ esetén fennáll $\|s_n - s_m\|^2 = \sigma_n - \sigma_m$.*

2. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér és $\{e_1, e_2, \ldots\} \subset H$ teljes ortonormált rendszer. Ekkor tetszőleges $x \in H$ Fourier-sora konvergens normában, és összege előállítja az x vektort, azaz*

$$\lim_{n \to \infty} \|s_n - x\| = 0.$$

Bizonyítás.

A Bessel-egyenlőtlenség szerint a (σ_n) sorozat korlátos, így mivel monoton növő, azért konvergens, tehát Cauchy-sorozat is. Az 5. Állítás szerint az (s_n) sorozat is Cauchy-sorozat normában. Így a H teljessége miatt konvergens, amivel a Fourier-sor konvergenciáját igazoltuk.

Jelölje a sor összegét egyelőre $z = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$. Ekkor egyszerűen látható, hogy $\langle z, e_i\rangle = x_i$. Így bármely i esetén $\langle x - z, e_i\rangle = x_i - x_i = 0$, ezért az ortogonális rendszer teljessége miatt $x = z$, amit igazolni akartunk.

□

A tételből a 3. és 4. Állítások felhasználásával következik az alábbi fontos tétel.

1. Következmény (Parseval-formula ortonormált rendszerre). *Legyen H Hilbert-tér és $\{e_1, e_2, \ldots\} \subset H$ teljes ortonormált rendszer. Ekkor tetszőleges $x \in H$ Fourier-együtthatóira fennáll*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = \|x\|^2.$$

1. Megjegyzés. Az 2. Tétel bizonyításából közvetlenül látható, hogy a tétel így is megfogalmazható. A $\sum x_i e_i$ sor pontosan akkor konvergens normában, ha $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ véges.

A fenti eredmények egyszerűen kiterjeszthetők arra az esetre is, amikor a vektorrendszer ortogonális, de nem normált. Ezt mutatjuk be röviden az következő szakaszban.

2.3. Fourier-sorfejtés ortogonális rendszer szerint

Egy ortogonális rendszer tagjait egyszerűen normálhatjuk, így ortonormált rendszerhez jutunk. A trigonometrikus rendszer esetében azonban látni fogjuk, hogy kényelmesebb a nem normált rendszer szerint megadni a sorfejtést, ezért röviden bemutatjuk, hogy a fenti eredmények hogyan módosulnak, ha a rendszer normáltságát nem tételezzük fel.

Legyen tehát H ismét egy vektortér, amelyen adott egy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzat. Legyen $\{f_1, f_2, \ldots\} \subset H$ ortogonális rendszer, melyben $\|f_i\| \neq 0$. Legyen $\alpha_i = \|f_i\|$ és $e_i = \frac{1}{\alpha_i} f_i$. Ekkor $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ minden i esetén, tehát $\{e_1, e_2, \ldots\} \subset H$ ortonormált rendszer. Legyenek ezen ortonormált rendszer szerint egy $x \in H$ elem Fourier-együtthatói az $x_i = \langle x, e_i\rangle$ számok. Ezek az $x_i = \frac{1}{\alpha_i}\langle x, f_i\rangle$ képlettel adhatók meg. Az x Fourier-sora az alábbi módon fejezhető ki az $\{f_1, f_2, \ldots\} \subset H$ ortogonális rendszerben.

$$x = \sum x_i e_i = \sum \frac{1}{\alpha_i}\langle x, f_i\rangle \frac{1}{\alpha_i} f_i = \sum \frac{\langle x, f_i\rangle}{\langle f_i, f_i\rangle} f_i.$$

3. Definíció. Legyen $\{f_1, f_2, \ldots\} \subset H$ ortogonális rendszer, melyben $\|f_i\| \neq 0$. Egy $x \in H$ vektor általánosított Fourier-együtthatói az $\frac{\langle x, f_i\rangle}{\langle f_i, f_i\rangle}$ számok, az x általánosított (formális) Fourier-sora

$$\sum \frac{\langle x, f_i\rangle}{\langle f_i, f_i\rangle} f_i.$$

A Bessel-egyenlőtlenséget az $e_i = \frac{1}{\alpha_i} f_i$ ortonormált rendszerre alkalmazva az alábbit kapjuk.

3. Tétel (Bessel-egyenlőtlenség ortogonális rendszerre). *Legyen $\{f_1, f_2, \ldots\} \subset H$ ortogonális rendszer, melyben $\|f_i\| \neq 0$. Tetszőleges $x \in H$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, f_i\rangle^2}{\langle f_i, f_i\rangle} \leq \|x\|^2.$$

A Fourier-sor normabeli konvergenciája következik a 2 . Tételből.

4. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér és $\{f_1, f_2, \ldots\} \subset H$ teljes ortogonális rendszer ($\|f_i\| \neq 0$). Ekkor tetszőleges $x \in H$ Fourier-sora konvergens normában, és összege előállítja az x vektort, azaz*

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - x\| = 0, \qquad \textit{ahol } s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, f_i\rangle}{\langle f_i, f_i\rangle} f_i.$$

Az ortonormált rendszerre vonatkozó Parseval-formula alapján kapjuk az alábbit.

2. Következmény (Parseval-formula ortogonális rendszerre). *Legyen H Hilbert-tér, melyben adott egy $\{f_1, f_2, \ldots\} \subset H$ teljes ortogonális rendszer ($\|f_i\| \neq 0$). Ekkor tetszőleges $x \in H$ Fourier-együtthatóira fennáll*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, f_i\rangle^2}{\langle f_i, f_i\rangle} = \|x\|^2.$$

2.4. Fourier-sor L_2 konvergenciája

Az eddigiekben a Fourier-sort egy tetszőleges Hilbert-tér elemeire értelmeztük. Most térünk rá vizsgálatunk tulajdonképpeni tárgyára, amikor a Hilbert-tér egy függvénytér, azaz függvények Fourier-sorát határozzuk meg.

Legyen egyelőre X egy halmaz, H pedig az X-en értelmezett valós vagy komplex számértékű függvények tere. Ez a szokásos műveletekkel vektortér. A skalárszorzatot rendszerint integrállal adják meg, pontosabban két függvény skalárszorzata a szorzatuk integrálja az X-en. Ennek értelmezéséhez szükséges egy mérték az X halmazon. Legyen tehát X egy olyan halmaz, amelyen adott egy μ mérték (valamilyen szigma-algebrán). Legyen $H = L_2(X, \mu)$, az X-en μ szerint négyzetesen integrálható függvények tere. Ez egyrészt vektortér, másrészt az

$$\langle f, g\rangle = \int_X fg \mathrm{d}\mu \tag{1}$$

képlet skalárszorzatot definiál. (Komplex esetben az integrálban g konjugáltját vesszük.) A Riesz–Fischer-tétel szerint a skalárszorzat által indukált L_2 normával a H tér teljes.

Legyen $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\} \subset H$ teljes ortonormált rendszer, azaz $\int_X \phi_n\phi_m \mathrm{d}\mu = 0$, ha $n \neq m$, $\int_X \phi_n^2 \mathrm{d}\mu = 1$, és ha $\int_X \phi_n f \mathrm{d}\mu = 0$ minden n-re, akkor $f = 0$.

Egy $f \in L_2(X, \mu)$ függvény Fourier-együtthatói az $f_n = \int_X f\phi_n \mathrm{d}\mu$ számok, és Fourier-sora a $\sum f_n\phi_n$ függvénysor. A 2. Tételből következik az alábbi.

5. Tétel. *Tetszőleges $f \in L_2(X, \mu)$ függvény Fourier-sora L_2 normában konvergens és előállítja a függvényt, azaz $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\phi_n$, ahol az előállítás úgy értendő, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f - s_n|^2 d\mu = 0, \qquad \textit{ahol } s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i\phi_i.$$

Természetes kérdés, hogy az $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\phi_n$ előállítás érthető-e pontonkénti vagy egyenletes konvergencia szerint. A továbbiakban ezt fogjuk vizsgálni, először általános mértéktérben és ortonormált rendszerre, majd az X halmazt és a μ mértéket a klasszikus tárgyalásnak megfelelően választva.

2.5. Fourier-sor pontonkénti és egyenletes konvergenciája általános esetben

A pontonkénti konvergenciával kapcsolatban hasznos lesz az L^p terek teljességének bizonyításánál használt Riesztől származó lemma.

1. Lemma (Riesz). *Ha $(g_n) \subset L_2(X, \mu)$ konvergens sorozat, akkor van pontonként μ-majdnem mindenütt konvergens részsorozata.*

Ha tehát az $s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \phi_i$ sorozatról tudjuk, hogy pontonként μ-majdnem mindenütt konvergens, akkor ott csak az f függvényhez tarthat mert egy részsorozata az f-hez tart. Tehát fennáll az alábbi.

3. Következmény. *Ha egy $f \in L_2(X, \mu)$ függvény Fourier-sora pontonként μ-majdnem mindenütt konvergens, akkor összege az f függvény, azaz μ-majdnem minden x-re $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n(x)$.*

A Fourier-sor pontonkénti konvergenciájára egyszerű feltételt kaphatunk a Lebesgue-féle dominált konvergenciatétel felhasználásával, melynek sorokra vonatkozó alakját emlékeztetőül itt közöljük.

6. Tétel (Lebesgue). *Legyen $(g_n) \subset L_2(X, \mu)$ olyan sorozat, amelyre $\sum \int_X |g_n| d\mu$ konvergens. Ekkor a $\sum g_n$ sor pontonként μ-majdnem mindenütt konvergens, és*

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} g_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X g_n \, d\mu.$$

Amikor ezt a tételt az $s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \phi_i$ sorozatra szeretnénk alkalmazni, akkor az $\int_X |f_i||\phi_i|$ integrált kell becsülni. Mivel $\int_X \phi_n^2 \mathrm{d}\mu = 1$, azaz a ϕ_n függvények L_2 normája 1, azért, ha a mértéktér véges ($\mu(X) < \infty$), akkor létezik olyan K, melyre $\int_X |\phi_n| \leq K$ minden n esetén. Így $\sum \int_X |c_n \phi_n| \mathrm{d}\mu$ konvergens, ha $\sum |c_n|$ konvergens. Ezzel a következő tétel igazolható.

7. Tétel. *Legyen a mértéktér véges ($\mu(X) < \infty$). Ha egy $f \in L_2(X, \mu)$ függvény Fourier-együtthatóira fennáll, hogy $\sum |f_n|$ konvergens, akkor a függvényt majdnem mindenütt előállítja a Fourier-sora, azaz μ-majdnem minden x-re $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n(x)$.*

Az egyenletes konvergencia az alábbi kritérium segítségével igazolható.

2. Lemma (Weierstrass-féle egyenletes konvergencia kritérium). *Legyen $g_n : X \to \mathbb{R}$ olyan függvénysorozat, amelyhez létezik olyan (a_n) számsorozat, hogy $|g_n(x)| \leq a_n$ minden $x \in X$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, valamint $\sum a_n$ konvergens. Ekkor a $\sum g_n$ függvénysor egyenletesen konvergens X-en.*

8. Tétel. *A $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\} \subset H$ teljes ortonormált rendszer legyen egyenletesen korlátos, azaz legyen K olyan szám, hogy $|\phi_n(x)| \leq K$ minden $x \in X$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ha egy $f \in L_2(X, \mu)$ függvény Fourier-együtthatóira fennáll, hogy $\sum |f_n|$ konvergens, akkor a függvényt előállítja az egyenletesen konvergens Fourier-sora, azaz $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n(x)$ és a konvergencia egyenletes X-en.*

Konkrét ortogonális rendszerek esetén továbbiak mondhatók, amint később látni fogjuk.

3. Általános ortogonális sorok

Legyen most X egy intervallum, μ egy magfüggvénnyel vett integrál (a Lebesgue-mértékre nézve abszolút folytonos mérték). Ortogonális rendszer az alábbiak valamelyike:

1. Trigonometrikus rendszer.
2. Ortogonális polinomok.
3. Rademacher-rendszer.
4. Haar-rendszer.

Az ortogonális sorokkal általános esetben a későbbiekben foglalkozunk. Először rátérünk a trigonometrikus rendszer szerinti Fourier-sor tárgyalására.

4. A trigonometrikus rendszer szerinti Fourier-sor

Az

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x \dots \tag{2}$$

függvénysorozatot trigonometrikus rendszernek nevezzük. Az alábbiakban először megadjuk az ezen rendszerrel definiált Fourier sort, és példákkal szemléltetjük. Ezután a sor egyenletes, illetve pontonkénti konvergenciáját tanulmányozzuk.

4.1. A Fourier-sor megadása

6. Állítás. *A (2) függvénysorozat ortogonális rendszert alkot tetszőleges 2π hosszúságú intervallumon az (1) skalárszorzatra nézve. A függvényeket $1/\sqrt{\pi}$-vel (a konstanst $1/\sqrt{2\pi}$-vel) normálva ortonormált rendszert kapunk, azaz a*

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \quad \varphi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad x \in I \tag{3}$$

sorozat ortonormált rendszer tetszőleges 2π hosszúságú I intervallumon. Legtöbbször az $I = [-\pi, \pi]$, illetve az $I = [0, 2\pi]$ esetet fogjuk tekinteni.

Az I intervallumon értelmezett, Lebesgue-mérték szerint négyzetesen integrálható függvények terét röviden $L_2(I)$ fogja jelölni. Igazolható, lásd például [2] 2.1 szakasz, hogy a trigonometrikus rendszer teljes.

7. Állítás. *A (3) függvénysorozat teljes rendszert alkot tetszőleges 2π hosszúságú I intervallumon. Azaz, ha egy $f \in L_2(I)$ függvényre fennáll $\int_I f\varphi_k = 0$ minden k esetén, akkor $f = 0$ az $L_2(I)$ térben. Speciálisan, ha f folytonos is, akkor $f(x) = 0$ minden $x \in I$ esetén.*

A 3. Definíció szerint az alábbi Fourier-együtthatókat kapjuk.

4. Definíció. Egy $f \in L_2(I)$ függvény Fourier-együtthatói a (2) ortogonális rendszer szerint:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_I f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x, \; n = 0, 1, 2, \dots, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_I f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x, \; n = 1, 2, \dots. \tag{4}$$

Legtöbbször feltesszük, hogy az f függvény 2π szerint periodikus, ekkor az intervallum választása nem befolyásolja az együtthatók értékét. Könnyen látható, hogy az integrálok akkor is léteznek, ha $f \in L_1(I)$, ezért a Fourier-együtthatókat ilyen függvényekre is értelmezzük.

Az f függvény Fourier-sora

$$\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Erre a speciális esetre alkalmazhatjuk a Fourier-sorok általános elméletében kapott eredményeket. A Parseval-formulából (2. Következmény) az alábbit kapjuk.

8. Állítás (Klasszikus Parseval-formula). *Tetszőleges 2π hosszúságú I intervallum és $f \in L_2(I)$ függvény esetén*

$$\frac{\pi}{2}a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \int_I |f|^2.$$

A Fourier-sor L_2 értelemben vett konvergenciája az 5. Tételből következik. Legyen az n-edik részletösszeg

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Ekkor az 5. Tételből az alábbit kapjuk.

9. Tétel. *Egy $f \in L_2(I)$ függvény trigonometrikus rendszer szerinti Fourier-sora L_2 értelemben konvergens, azaz*

$$\lim_{n\to\infty}\int_I |f - S_n|^2 = 0.$$

A további elméleti vizsgálatok előtt célszerű néhány egyszerű függvény Fourier-együtthatóit meghatározni.

1. Példa. Legyen $f(x) = x$, ha $x \in (-\pi, \pi)$, és f periodikus 2π szerint (a π páratlan többszöröseinél egyelőre tetszőlegesen definiálhatjuk). A (4) integrálokat kiszámítva a függvény Fourier-együtthatói: $a_n = 0$, $b_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. A függvény nyilván L_2-beli, így a 9. Tétel szerint L_2 normában konvergál hozzá a Fourier-sora, valamint igaz rá a Parseval-formula. Ez utóbbiból közvetlenül megkaphatjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. A Fourier-sor pontonkénti konvergenciáját egyelőre az általános tételek segítségével nem kapjuk meg.

2. Példa. Legyen $f(x) = (\pi - x)/2$, ha $x \in (0, 2\pi)$, és f periodikus 2π szerint (a π páros többszöröseinél egyelőre tetszőlegesen definiálhatjuk). A (4) integrálokat kiszámítva a függvény Fourier-együtthatói: $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$. A függvény nyilván L_2-beli, így a 9. Tétel szerint L_2 normában konvergál hozzá a Fourier-sora, valamint igaz rá a Parseval-formula. Ez utóbbiból ismét közvetlenül megkaphatjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. A Fourier-sor pontonkénti konvergenciáját egyelőre az általános tételek segítségével nem kapjuk meg.

3. Példa. Legyen $f(x) = x^2$, ha $x \in [-\pi, \pi]$, és f periodikus 2π szerint. A (4) integrálokat kiszámítva a függvény Fourier-együtthatói: $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_n = 4\frac{(-1)^n}{n^2}$, $b_n = 0$. A függvény nyilván L_2-beli, így a 9. Tétel szerint L_2 normában konvergál hozzá a Fourier-sora, valamint igaz rá a Parseval-formula. Ez utóbbiból közvetlenül megkaphatjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. A Fourier-sor egyenletes konvergenciája a 8. Tételből következik, ugyanis a trigonometrikus rendszer tagjai egyenletesen korlátosak, az együtthatók $1/n^2$ nagyságrendűek, és a $\sum 1/n^2$ sor konvergens. Tehát azt kapjuk, hogy minden $x \in [-\pi, \pi]$ esetén fennáll

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,$$

sőt a sor nemcsak pontonként, hanem egyenletesen is konvergens a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. (Így például az $x = \pi$ helyettesítéssel ismét megkapjuk a $\sum 1/n^2$ sor összegét.)

4.2. A Fourier-sor egyenletes konvergenciája

A példáknál szerzett tapasztalatok alapján néhány általános állításhoz is eljuthatunk, ha a Fourier-együtthatókat parciális integrálással számítjuk ki. Ehhez fel kell tennünk, hogy az f függvény differenciálható valamilyen 2π hosszúságú nyílt intervallumon, egyszerűség kedvéért legyen ez a $(-\pi, \pi)$ intervallum. Ekkor

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \left[f(x) \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, \mathrm{d}x. \tag{5}$$

A jobb oldal kiszámításához az f függvénynek bizonyos feltételeket teljesítenie kell. Az első tag érdekében feltesszük, hogy az f függvénynek van baloldali, illetve jobboldali határértéke a π és $-\pi$ pontokban, melyeket $f(\pi - 0)$ és $f(-\pi + 0)$ fog jelölni. (A periodikusság miatt nem célszerű feltenni f folytonosságát az intervallum végpontjaiban.) A második tag értelmezéséhez elegendő például, hogy az f' derivált függvény L_1-beli, természetesen a derivált folytonossága is elegendő. A b_n együtthatókra hasonló összefüggést felírva kapjuk az alábbi állítást.

9. Állítás. *Legyen az f függvény differenciálható a $(-\pi, \pi)$ intervallumon, legyen az f' derivált függvény L_1-beli, és tegyük fel, hogy léteznek az $f(\pi - 0)$ és $f(-\pi + 0)$ egyoldali határértékek. Ekkor a Fourier-együtthatók $1/n$ nagyságrendűek, azaz van olyan K szám, hogy $|a_n| \le K/n$ és $|b_n| \le K/n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.*

Ha az f kétszer differenciálható, akkor ezt az állítást az f' deriváltra is lehet alkalmazni. Amennyiben az f a zárt intervallumon folytonos és 2π szerint periodikus, akkor az (5) jobboldalának első tagja nulla, így a következőt kapjuk.

$$\pi a_n = \frac{1}{n} \left[f'(x) \frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, \mathrm{d}x.$$

A b_n együtthatókra hasonló összefüggést felírva kapjuk az alábbi állítást.

10. Állítás. *Legyen a 2π szerint periodikus f függvény kétszer differenciálható a $(-\pi, \pi)$ intervallumon és folytonos az intervallum végpontjaiban. Legyen az f'' második derivált függvény L_1-beli a $(-\pi, \pi)$ intervallumon, és tegyük fel, hogy léteznek az $f'(\pi - 0)$ és $f'(-\pi + 0)$ egyoldali határértékek. Ekkor a Fourier-együtthatók $1/n^2$ nagyságrendűek, azaz van olyan K szám, hogy $|a_n| \le K/n^2$ és $|b_n| \le K/n^2$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.*

Az f függvényre tett fenti feltételek mellett a Fourier-sor egyenletes konvergenciája a 8. Tételből következik, ugyanis a trigonometrikus rendszer tagjai egyenletesen korlátosak, az együtthatók $1/n^2$ nagyságrendűek, és a $\sum 1/n^2$ sor konvergens. Ezt fogalmazzuk meg a következő tételben.

10. Tétel. *Legyen f a 10. Állítás feltételeinek eleget tevő függvény. Ekkor a függvényt előállítja az egyenletesen konvergens Fourier-sora, azaz minden $x \in [-\pi, \pi]$ esetén fennáll*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{6}$$

és a konvergencia egyenletes a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.

A tétel feltételei kis mértékben enyhíthetők a következő észrevétel és a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség felhasználásával. Tekintsük az (5) egyenletet folytonos, periodikus függvény esetén. Jelölje az f' derivált függvény Fourier-együtthatóit a'_n és b'_n. Ekkor (5), illetve a b_n együtthatóra vonatkozó analóg képlet szerint

$$a_n = -\frac{1}{n} b'_n \,, \qquad b_n = \frac{1}{n} a'_n.$$

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség szerint

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} |b_n'| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |b_n'|^2}.$$

Ha az f' derivált függvény L_2-beli, akkor a Bessel-egyenlőtlenség miatt a $\sum |b_n'|^2$ sor konvergens, így a $\sum |a_n|$ sor és hasonló módon a $\sum |b_n|$ sor is konvergens. Így a 8. Tételből az alábbi következik.

11. Tétel. *Legyen a 2π szerint periodikus f függvény differenciálható a $(-\pi, \pi)$ intervallumon és folytonos az intervallum végpontjaiban. Legyen az f' derivált függvény L_2-beli a $(-\pi, \pi)$ intervallumon. Ekkor a függvényt előállítja az egyenletesen konvergens Fourier-sora, azaz minden $x \in [-\pi, \pi]$ esetén fennáll (6) és a konvergencia egyenletes a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.*

4.3. A Fourier-sor pontonkénti konvergenciája

A fenti két tétel bizonyítása annak köszönhetően volt ilyen egyszerű, hogy erős feltételek álltak fenn az f függvényre. Bonyolultabb bizonyítás segítségével a Fourier-sor pontonkénti konvergenciája általánosabb (kevesebb simasági feltételnek eleget tevő) függvényekre is igazolható. Ezt motiválja a fenti 1. és 2. Példa, melyeknél a Fourier-sor konvergenciája ilyen egyszerűen nem igazolható.

Megjegyezzük, hogy az Abel-féle konvergencia kritérium segítségével a 2. Példa esetében a konvergencia igazolható. Most azonban egy olyan általános megközelítést mutatunk be, amely $1/n$ nagyságrendű együtthatók esetében alkalmazható.

Ha az f függvény L_2-beli, akkor a Bessel-egyenlőtlenség miatt a $\sum a_n^2$ és a $\sum b_n^2$ sor konvergens, így az (a_n) és (b_n) sorozatok nullához tartanak, azaz fennáll az alábbi.

3. Lemma (Riemann-Lebesgue). *Legyen f L_2-beli függvény egy 2π hosszúságú intervallumon. Ekkor Fourier-együtthatói nullához tartanak, azaz $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.*

2. Megjegyzés. Mivel az L_1-beli függvények megközelíthetők L_2-beliekkel, azért igazolható, hogy a fenti lemma L_1-beli függvények Fourier-együtthatóira is igaz.

A továbbiakban kulcsszerepet fog játszani a

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$$

Dirichlet-féle magfüggvény. A függvény alkalmazhatóságát az alábbi, elemien igazolható állítás mutatja.

11. Állítás. *A Dirichlet-féle magfüggvényre $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$ és $t \neq 0$ esetén fennáll*

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2} t}.$$

A Fourier-sor pontonkénti konvergenciájához a részletösszegek

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

sorozatának pontonkénti konvergenciája szükséges. Felhasználva a Fourier-együtthatók integrálos előállítását, a Dirichlet-féle magfüggvény segítségével a részletösszegek az alábbi módon adhatók meg.

4. Lemma. *Tetszőleges L_1-beli, 2π szerint periodikus f függvény esetén fennáll*

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\ dt.$$

A pontonkénti konvergencia igazolásához célszerű az f függvényt is integrál alakjában megadni az alábbi triviális módon a Dirichlet-féle magfüggvény definícióját felhasználva.

$$\frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}f(x)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(D_n(t) - \sum_{k=1}^{n}\cos kt)f(x)\ \mathrm{d}t.$$

Mivel a $\cos kt$ függvény integrálja egy 2π hosszúságú intervallumon nulla, azért

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x)\ \mathrm{d}t.$$

A pontonkénti konvergenciához tekintsük az $S_n(x) - f(x)$ különbséget. A 11. Állítást felhasználva

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t) - f(x))D_n(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\frac{t}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin(n+\frac{1}{2})t.$$

A $t \mapsto t/\sin\frac{1}{2}t$ függvény folytonos, ezért ha az $F(t) = (f(x+t) - f(x))/t$ függvény L_2-beli, akkor a kettő szorzata is L_2-ben van, így a Riemann–Lebesgue-lemma alábbi egyszerű következménye szerint az $S_n(x) - f(x)$ különbség nullához tart.

4. Következmény. *Ha g L_2-beli függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, akkor*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\ dt = 0.$$

Az F függvény L_2-beliségét számos feltétellel lehet biztosítani, pl. f differenciálhatóságával vagy egyoldali differenciálhatóságával az x pontban. Ennél enyhébb feltételt szoktak használni, pl. az alábbit.

5. Definíció. Az f függvény az x pontban lokálisan Lipschitz tulajdonságú, ha van olyan δ és L pozitív szám, hogy $|t| < \delta$ esetén fennáll $|f(x+t) - f(x)| \le L|t|$.

Könnyen látható, hogy ha az f függvény L_2-beli és az x pontban lokálisan Lipschitz tulajdonságú, akkor az $F(t) = (f(x+t) - f(x))/t$ függvény is L_2-beli. Ezzel tehát igazoltuk az alábbi fontos tételt.

12. Tétel. *Legyen a 2π szerint periodikus f függvény L_2-beli és az x pontban lokálisan Lipschitz tulajdonságú. Ekkor a függvényt az x pontban előállítja a Fourier-sora, azaz x-ben fennáll (6).*

Ez a tétel megadja a 2. Példában szereplő Fourier-sor pontonkénti konvergenciáját. Nevezetesen a tételből következően minden $x \in (-\pi, \pi)$ esetén fennáll

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$$

A tétel már elég széles függvényosztály esetében biztosítja a Fourier-sorral való előállíthatóságot, mégis lehetnek olyan függvények, amelyeknek Fourier-sora akár folytonossági helyeken sem állítja elő a függvényt. Az első példát Fejér Lipót adta 1910-ben olyan folytonos függvényre, amelynek Fourier-sora egy pontban divergens. Később az 1930-as években igazolták, hogy van olyan folytonos függvény, melynek Fourier-sora kontinuum sok pontban (melyek azonban nulla mértékű halmazt alkotnak) divergens. Kolmogorov mutatott példát olyan L_1-beli függvényre, melynek Fourier-sora minden pontban divergens. Luzin 1915-ös sejtése szerint egy folytonos függvény Fourier-sora majdnem mindenütt konvergens. Carleson 1966-ban igazolta, hogy egy L_2-beli (tehát speciálisan folytonos) függvény Fourier-sora majdnem mindenütt konvergens. Ezt Hunt általánosította 1969-ben L_p-beli függvényekre, $p > 1$ esetén.

4.4. Fourier-sor klasszikus megközelítése

A Fourier-sorral kapcsolatos eredmények nagy része a mértékelmélet felhasználása nélkül is megkapható. A mértékelmélet abban játszott szerepet, hogy a 2.1. Szakaszban bevezetett H vektortér az $L_2(I)$ függvénytér volt, valamilyen I intervallum választása mellett. Ezen függvénytér előnye, hogy az (1) skalárszorzat értelmezve van rajta, és az ezzel meghatározott normával a tér teljes a Riesz–Fischer-tétel szerint. A 2.1. Szakaszban bevezetett általános kontextusban maradhatunk akkor is, ha kevesebb függvényt tartalmazó teret választunk, amelyen még az integrállal definiált skalárszorzat értelmezhető. Lehetne ez a tér például a folytonos függvénye $C(I)$ tere, az integrált Riemann-integrálként tekintve. Ekkor a tér teljessége (az integrál normában) nem áll fenn, tehát a normabeli konvergenciát elveszítjük, viszont az algebrai megközelítés során kapott eredmények érvényben maradnak. Ezenkívül a pontonkénti és egyenletes konvergenciával kapcsolatos eredmények is igazak, hiszen ezeket klasszikus eszközökkel, a mértékelmélet felhasználása nélkül kaptuk.

Az eddig említett példák is mutatják, hogy a folytonos függvények tere nem elég széles, szeretnénk legalább szakaszonként folytonos függvényeket is Fourier-sorba fejteni. Az $L_2(I)$ függvénytér tehát túl tág, a $C(I)$ pedig túl szűk. Az irodalomban leggyakrabban használt kompromisszum a kettő között a szakaszonként folytonos függvények alábbi altere.

6. Definíció. *Legyen $PC(2\pi)$ azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények tere, amelyek 2π szerint periodikusak, egy perióduson belül véges sok szakadási helytől eltekintve folytonosak, és a szakadási helyeken létezik a bal- és jobboldali határértékük.*

Ezek a függvények a szokásos műveletekkel vektorteret alkotnak, és nyilván Riemann-integrálhatók, ezért az (1) skalárszorzat értelmezve van a $H = PC(2\pi)$ vektortéren. A (2) trigonometrikus rendszer teljes ortogonális rendszer ebben a térben is, így a Fourier-együtthatók és a Fourier sor a 4. Definíció szerint adhatók meg. Fontos megjegyezni, hogy a Bessel-egyenlőtlenség most is következik az általános alakból (3. Tétel), azonban a Parseval-azonossághoz szükség van a tér teljességére, ezért azt közvetlenül nem kapjuk meg az általános megközelítésből.

Mivel a $PC(2\pi)$ függvénytér elemeire is igaz a Bessel-egyenlőtlenség, ezért ezekre is fennáll a Riemann–Lebesgue-lemma (3. Lemma). Így a 12. Tétel 4.3. Szakaszban bemutatott bizonyítása szó szerint ez esetben is elmondható, amely az alábbihoz vezet.

13. Tétel. *Legyen az $f \in PC(2\pi)$ függvény egy x pontban lokálisan Lipschitz tulajdonságú. Ekkor a függvényt az x pontban előállítja a Fourier-sora, azaz x-ben fennáll (6).*

A Fourier-sor egyenletes konvergenciájáról szóló 11. Tétel bizonyítása is megismételhető a $PC(2\pi)$ függvénytérben, ami a következőt adja.

14. Tétel. *Legyen az $f \in PC(2\pi)$ függvény differenciálható a $(-\pi, \pi)$ intervallumon és folytonos az intervallum végpontjaiban, valamint legyen az f' derivált függvény is $PC(2\pi)$-beli. Ekkor a függvényt előállítja az egyenletesen konvergens Fourier-sora, azaz minden $x \in [-\pi, \pi]$ esetén fennáll (6) és a konvergencia egyenletes a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.*

4.5. Komplex Fourier-sor

A valós Fourier-sorból kiindulva a [2] könyv 2.3 szakasza alapján eljutunk a következő rendszerhez:

$$\exp(inx) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{7}$$

12. Állítás. *A (7) függvénysorozat ortogonális rendszert alkot tetszőleges 2π hosszúságú intervallumon az (1) skalárszorzatra nézve. A függvényeket $1/\sqrt{2\pi}$-vel normálva ortonormált rendszert kapunk, azaz a $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ rendszer ortonormált.*

A valós trigonometrikus rendszer teljességét felhasználva igazolható, hogy a (7) rendszer teljes.

13. Állítás. *A (7) függvénysorozat teljes rendszert alkot tetszőleges 2π hosszúságú I intervallumon. Azaz, ha egy $f \in L_2(I)$ függvényre fennáll $\int_I f\overline{\varphi_n} = 0$ minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén, akkor $f = 0$ az $L_2(I)$ térben. Speciálisan, ha f folytonos is, akkor $f(x) = 0$ minden $x \in I$ esetén.*

A skalárszorzat definíciója szerint az alábbi Fourier-együtthatókat kapjuk.

7. Definíció. Egy $f \in L_2(I)$ függvény Fourier-együtthatói a (7) ortogonális rendszer szerint:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_I f(x) \mathrm{e}^{-inx} \, \mathrm{d}x, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \tag{8}$$

Legtöbbször feltesszük, hogy az f függvény 2π szerint periodikus, ekkor az intervallum választása nem befolyásolja az együtthatók értékét. Könnyen látható, hogy az integrálok akkor is léteznek, ha $f \in L_1(I)$, ezért a Fourier-együtthatókat ilyen függvényekre is értelmezzük. A Fourier-együtthatókra szokásos az $\hat{f}(n) = c_n$ jelölést is használni.

Az f függvény Fourier-sora

$$\sum c_n \mathrm{e}^{inx}.$$

Erre a speciális esetre alkalmazhatjuk a Fourier-sorok általános elméletében kapott eredményeket. A Parseval-formulából az alábbit kapjuk.

14. Állítás (Klasszikus Parseval-formula). *Tetszőleges 2π hosszúságú I intervallum és $f \in L_2(I)$ függvény esetén*

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \int_I |f|^2.$$

A Fourier-sor L_2 értelemben vett konvergenciája az 5. Tételből következik. Legyen az n-edik részletösszeg

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx}.$$

Emellett szokás tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén a két indexű

$$S_{nm}(x) = \sum_{k=-m}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx}$$

részletösszeg sorozatot is tekinteni. Az 5. Tételből az alábbi következik.

15. Tétel. *Egy $f \in L_2(I)$ függvény komplex trigonometrikus rendszer szerinti Fourier-sora L_2 értelemben konvergens, azaz*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |f - S_n|^2 = 0,$$

pontosabban minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n, m > N$ esetén fennáll $\int_I |f - S_{nm}|^2 < \varepsilon$.

A komplex trigonometrikus rendszer esetében a pontonkénti konvergencia egyszerűen igazolható, amint ezt Chernoff [1] észrevette. Ezt mutatjuk be alább. A Parseval-formula miatt egy L_2-beli függvény Fourier-együtthatói nullához tartanak. Amint fent említettük ez igaz L_1-beli függvényekre is, ezt az állítást nevezzük Riemann–Lebesgue-lemmának.

16. Tétel. *Legyen a 2π szerint periodikus f függvény L_2-beli és az x pontban lokálisan Lipschitz tulajdonságú. Ekkor a függvényt az x pontban előállítja a Fourier-sora, azaz fennáll*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

4.6. Fejér-féle szummáció

Bár a 12. Tétel már számos függvény esetében bizosítja a trigonometrikus polinommal való közelíthetőséget, mégsem igaz minden folytonos függvényre, amint pl. Fejér ellenpéldája mutatja. Felvetődik a kérdés, hogy ha csak a folytonosságot tudjuk egy függvényről, akkor lehet-e trigonometrikus polinomokkal közelíteni. Erre ad választ Fejér alább bemutatandó tétele, melynek lényege, hogy a függvényt a Fourier-sora S_n részletösszegei helyett ezek átlagával, az úgynevezett Cesaro-középpel közelítjük, amelyet a

$$\Gamma_n = \frac{1}{n}(S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1})$$

képlet ad meg. A 4. Lemma szerint

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)\ \mathrm{d}t,$$

ahol

$$K_n = \frac{1}{n}(D_0 + D_1 + \ldots + D_{n-1})$$

a Fejér-féle magfüggvény. Ennek fontos tulajdonságait foglalja össze az alábbi.

5. Lemma. *A Fejér-féle magfüggvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal.* $K_n(0) = n/2$ *és* $t \neq 0$ *esetén*

$$K_n(t) = \frac{1}{2n}\left(\frac{\sin(\frac{1}{2}nt)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\right)^2,$$

$K_n \geq 0$ *és*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\ dt = 1.$$

Végül, ha $\delta \in (0,\pi)$, *akkor* $K_n(t) \leq \frac{1}{2n}\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2$ *minden* $|t| \in [\delta,\pi]$ *esetén.*

A K_n magfüggvény tulajdonságainak felhasználásával igazolható Fejér alábbi tétele.

17. Tétel (Fejér). *Ha az* f *függvény folytonos,* 2π *szerint periodikus függvény, akkor a* Γ_n *Cesaro-közepek egyenletesen konvergálnak hozzá.*

Hivatkozások

[1] P. R. Chernoff, Pointwise convergence of Fourier series, The American Mathematical Monthly 87(5), 399–400 (1980).

[2] Szőkefalvi-Nagy Béla, Valós függvények és függvénysorok, Tankönyvkiadó (1981).