

Parciális differenciálegyenletek előadás

Matematika BSc III/2

2016/2017. tavasz

Hol tartunk?

Ennek a előadásvázlatnak a célja, hogy címszavakban összefoglalja és átláthatóbbá tegye az előadásokon elhangzott anyagot. A vizsga anyaga minden, ami ebben az összefoglalóban szerepel, kivéve a „mese” jelzővel ellátott részek. Bizonyítani csak azokat az állításokat kell tudni, amelyek után a „biz.” rövidítés olvasható zárójelben (tehát azokat nem, ahol „nem biz.” vagy „biz. ötlete” vagy „biz. vázlata”).

1. előadás (február 16.)

- **Tájékoztató a félévről.**
- **Alapfogalmak:** jelölések $(\partial_t, \partial_x, \partial_x^2, \dots)$, multiindex $= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, abszolútértéke = deriválás rendje, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, PDE „fogalma”, klasszikus megoldás, rend, főbb egyenlettípusok (kvázilineáris, szemilineáris, lineáris), kérdések (létezés, egyértelműség, folytonos függés), korrekt kitűzésű feladat, mellékfeltételek;
- **Fizikai példák:** hullámegyenlet egydimenzióban (húr rezgése), magasabb dimenziós hullámegyenletek, hővezetési egyenlet egy- és több dimenzióban, további példák: transzport- és biharmonikus egyenlet.

2. előadás (február 23.)

- **Másodrendű, főrészében lineáris egyenletek osztályozása:** általános alak, főrész, előzetes feltevés $(a_{jk} = a_{kj})$, együtthatómátrix, sajátértékek előjele, elliptikus, hiperbolikus, parabolikus egyenlet, példák (hullámegyenlet, hővezetési egyenlet, Laplace-egyenlet);
- **Másodrendű lineáris egyenletek kanonikus alakja állandó együtthatós esetben:** a főrész transzformációjának ötlete (főtengelytétel, új változó bevezetése), az alacsonyabb rendű tagok transzformációjának ötlete (új függvény bevezetése exponenciális szorzótényező segítségével), kanonikus alak elliptikus esetben (Helmholtz-egyenlet);
- **A $C_0^\infty(\Omega)$ függvényosztály:** jelölések $(C^k(\Omega), k = 0, 1, 2, \dots, \infty)$ esetekben), tartó (support), kompakt tartójú függvények, $C_0^\infty(\Omega)$, példa: η függvény (biz. csak vázlatosan), η_ε és tulajdonságai („egységapproximációt generál”), az approximációs tétel (kimondás, biz. következő órán).

3. előadás (március 2.)

- **A $C_0^\infty(\Omega)$ függvényosztály:** az approximációs tétel (biz. kivéve $\|f_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$ a $p > 1$ esetben), $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű $L^p(\Omega)$ -ban $1 \leq p < \infty$ esetén (nem biz.), kompakt halmazon 1-gyel egyenlő kompakt tartójú sima függvény konstruálása (biz.), egységosztás tétele (biz.);
- **Disztribúciók alapfogalmai:** konvergencia $\mathcal{D}(\Omega)$ -ban, a disztribúció fogalma, példa (Dirac-delta).

4. előadás (március 9.)

- **Disztribúciók alapfogalmai:** reguláris disztribúció, T_f , reguláris disztribúció egyértelműen meghatározza melyik lokálisan integrálható függvényhez tartozik (biz.); a folytonosság ekvivalens megfogalmazása (biz.), alkalmazás T_f folytonosságának igazolására;

- **Disztribúciók egyenlősége:** globális és lokális egyenlőség fogalma, a két fogalom ekvivalenciája (biz.), disztribúció tartója, példák: $\text{supp } T_f = \text{supp } f$, $\text{supp } \delta_a = \{a\}$ (nem biz.);
- **Algebrai műveletek disztribúciókkal:** összeadás, számmal szorzás, $\mathcal{D}'(\Omega)$ vektortér, sima függvényrel szorzás;
- **Disztribúciók differenciálása:** motiváció ($\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$ legyen), $T_{\partial^\alpha f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(\partial^\alpha \varphi)$ (biz. ötlete), $\partial^\alpha u$ definíciója, $\partial^\alpha u$ továbbra is disztribúció (nem biz.), példa: $H' = \delta_0$ (biz.).

5. előadás (március 16.)

- **Disztribúciók differenciálása:** szakaszonként folytonosan differenciálható függvény deriváltja (nem biz., csak ötlet), hogyan tovább? (cél: $Lu = f$, ehhez alapmegoldás, konvolúció, amihez direkt szorzat);
- **Disztribúciók direkt szorzata:** függvények direkt szorzata, $T_{f \times g}$ megadása T_f és T_g segítségével (biz.), $u \times v$ definíciója, a definíció értelmessége (nem biz.), a direkt szorzat tulajdonságai, u és v felcserélése (biz.), linearitás (nem. biz.), differenciálás (nem biz.), tartó (nem biz.), példa: $\delta_a \times \delta_b = \delta_{(a,b)}$ (biz.);
- **Disztribúciók konvolúciója:** függvények konvolúciója, elégséges feltételek a konvolúció létezésére: mindkét függvény L^1 -beli (biz.) vagy az egyik kompakt tartójú (nem biz.), $T_{f * g}$ megadása T_f és T_g segítségével (biz.), baj: $\varphi(y+z)$ nem kompakt tartójú, ötlet: csonkítás, csonkító függvények konvergenciája \mathbb{R}^{2n} -ben, $T_{f * g} = \lim_{k \rightarrow \infty} T_f \times T_g((y, z) \mapsto \varphi(y+z)\zeta_k(y, z))$, $u * v$ definíciója (mikor értelmes), a konvolúció tulajdonságai, linearitás (nem biz.), kommutativitás (nem biz.), differenciálás (nem biz.).

6. előadás (március 23.)

- **Disztribúciók konvolúciója:** konvolúció tartója, példák: $T_{f * g}$, $\delta_0 * u$;
- **Alapmegoldások:** állandó együtthatós lineáris differenciáloperátor alakja, alapmegoldás definíciója, $Lu = F$ megoldása az alapmegoldás segítségével és egyértelműsége megfelelő értelemben (biz.), példák alapmegoldásokra (hővezetés, hullámgömb, Poisson-egyenlet);
- **Hullámgömbre vonatkozó Cauchy-feladatok:** a klasszikus feladat, klasszikus megoldás, jel \mathbb{R}_+^{n+1} , cél: hogyan általánosítható?, a Cauchy-feladat klasszikus megoldása disztribúció értelemben eleget tesz a hullámgömbre vonatkozó $F = T_{\tilde{f}} + \delta'_0 \times T_g + \delta_0 \times T_h$ jobb oldal esetén (biz.), az általánosított Cauchy-feladat értelmezése, az általánosított Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik megoldása (nem biz.), a klasszikus feladatnak legfeljebb egy megoldása van (biz.), d'Alembert-formula (nem biz.), mese a véges sebességű hullámterjedésről.

7. előadás (március 30.)

- **Hullámgömbre vonatkozó Cauchy-feladatok:** mese a véges sebességű hullámterjedésről és a Huygens-elvről;
- **Hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok:** a klasszikus feladat értelmezése, a klasszikus megoldás disztribúció értelemben eleget tesz a hővezetési egyenletnek $F = T_{\tilde{f}} + \delta_0 \times T_g$ jobb oldallal, az általánosított Cauchy-feladat értelmezése, a hővezetési egyenlet alapmegoldása, baj: $E * F$ általában nem létezik, keressünk olyan disztribúcióosztályt, amelyben létezik, az \mathcal{M} függvényosztály bevezetése, az \mathcal{M} osztályban $E * f$ függvény értelemben létezik és nem vezet ki (biz.), $\tilde{\mathcal{M}}$ disztribúcióosztály, ha $F \in \tilde{\mathcal{M}}$, akkor $E * F$ disztribúció értelemben létezik és $E * F \in \tilde{\mathcal{M}}$ (biz.), a klasszikus Cauchy-feladat megoldásának létezése (nem biz.), mese a végtelen sebességű hőterjedésről;

- **Peremérték-feladatok:** $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$, divergencia, gradients, Δ , különböző peremfeltételek (Dirichlet, Neumann, harmadik).

8. előadás (április 6.)

- **Peremérték-feladatok:** emlékeztető a három peremfeltételről, milyen simaságú megoldást keresünk?, Gauss–Osztrogradszkij-tétel (skalár és vektoralak, nem biz.), mese a fizikai jelentésről, Green első és második formulája (biz.), a harmadik peremérték-feladat megoldásának egyértelműsége (biz.), sajátértékek, sajátérték-feladatok, a sajátértékek előjele (biz.);
- **Poisson-egyenlet alapmegoldása:** az alapmegoldás (nem biz.), mese a fizikai jelentésről;
- **Green-függvények:** Green-függvény értelmezése, a Green-függvények három tulajdonsága (biz. csak a két könnyű), Green reprezentációs tétele (biz. a következő órán).

9. előadás (április 24.)

- **Green-függvények:** emlékeztető a Green-függvényekről, Green reprezentációs tétele (biz.);
- **Poisson-formula:** inverzió, az inverzió egy tulajdonsága (biz.), gömb Green-függvénye és normális irányú deriváltja (nem biz.), gömbre vonatkozó Poisson-formula (nem biz.), a formula komplex függvénytani alakja (biz.), feltér Green-függvényének meghatározása a hipersíkra való tükrözés módszerével (mese), feltérre vonatkozó Poisson-formula (mese, nem biz.).

10. előadás (április 27.)

- **Szoboljev-terek:** a $H^k(\Omega)$ tér értelmezése teljessé tétellel, hogyan jellemezhetők a térben a függvények? (biz. az egyik irány), a $H_0^k(\Omega)$ tér értelmezése, néhány egyszerű alaptulajdonság, ekvivalens norma $H_0^1(\Omega)$ -ban (biz.), $H^1(\Omega)$ -beli függvények peremre való megszorításának motivációja, normaegyenlőtlenség $C^1(\bar{\Omega})$ -beli függvények peremre való megszorítására (nem biz.), a nyom operátor és a nyom értelmezése, $H_0^1(\Omega)$ jellemzése a nyom segítségével (nem biz.).

11. előadás (május 4.)

- **Szoboljev-terek:** emlékeztető a Szoboljev-terek eddigi tulajdonságairól, a $H^1(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)$ terek beágyazása az $L^2(\Omega)$ térbe kompakt (nem biz.), a kompaktság jelentése sorozatokkal, Poincaré-egyenlőtlenség (mese), nemkorlátos tartományon nem igaz a kompakt beágyazás (példa);
- **Peremérték-feladatok gyenge megoldásai:** a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$ operátorra vonatkozó első peremérték-feladat a klasszikus esetben, a gyenge alak értelmezése próbafüggvénnyel való szorzással (biz.), kapcsolat a klasszikus és gyenge megoldások között (biz.), ekvivalens skalárszorzat bevezetése a $H_0^1(\Omega)$ -térben (biz.), gyenge megoldás létezése, egyértelműsége és folytonos függése a jobb oldaltól homogén Dirichlet-peremfeltétel esetén (biz.).