Parciális differenciálegyenletek vizsga minta

2017. tavaszi félév

Tudnivalók. A vizsga két részből áll, amelyek időben nem különülnek el egymástól. A rövid kérdések egy-egy fogalomra, tételre vagy példára kérdeznek rá, a második rész egy nagyobb témakör áttekintése irányított kérdéseken keresztül. Bizonyítani akkor kell, ha az adott feladat kéri. Fontos, hogy a válaszokban használt jelölésekről egyértelműen kiderüljön, hogy milyen típusú objektumot jelölnek (szám, függvény, disztribúció, multiindex stb.). Mindkét részben maximálisan 25 pont szerezhető, külön-külön nincs minimálisan szükséges pontszám, hanem a vizsga érdemjegyét az összpontszám határozza meg. A ponthatárok nem lesznek szigorúbbak, mint 28–33–38–43.

Rövid kérdések.

1. Írja fel az egydimenziós hővezetési egyenlet együtthatómátrixát és ennek alapján indokolja meg, hogy milyen típusú az egyenlet (elliptikus/parabolikus/hiperbolikus). (2 pont)
2. Definiálja a $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergencia fogalmát. (2 pont)
3. Definiálja egy disztribúció sorozatfolytonosságának fogalmát. (2 pont)
4. Definiálja az alapmegoldás fogalmát. (2 pont)
5. Definiálja disztribúciók direkt szorzatának fogalmát. (2 pont)
6. Definiálja a gradiens és a divergencia fogalmát, majd adja meg a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátort parciális deriváltak segítségével. (3 pont)
7. Mondja ki Green első formuláját a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátorra. (3 pont)
8. Definiálja a Green-függvény fogalmát. (3 pont)
9. Írja fel egy $u \in H_0^1(\Omega)$ függvény eredeti és ekvivalens normáját multiindexes jelölés használata nélkül. (3 pont)
10. Definiálja a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ peremérték-feladat gyenge alakjának fogalmát. (3 pont)

Parciális differenciálegyenletek vizsga minta

2017. tavaszi félév

Tudnivalók. A vizsga két részből áll, amelyek időben nem különülnek el egymástól. A rövid kérdések egy-egy fogalomra, tételre vagy példára kérdeznek rá, a második rész egy nagyobb témakör áttekintése irányított kérdéseken keresztül. Bizonyítani akkor kell, ha az adott feladat kéri. Fontos, hogy a válaszokban használt jelölésekről egyértelműen kiderüljön, hogy milyen típusú objektumot jelölnek (szám, függvény, disztribúció, multiindex stb.). Mindkét részben maximálisan 25 pont szerezhető, külön-külön nincs minimálisan szükséges pontszám, hanem a vizsga érdemjegyét az összpontszám határozza meg. A ponthatárok nem lesznek szigorúbbak, mint 28–33–38–43.

Rövid kérdések.

1. Írja fel az egydimenziós hővezetési egyenlet együtthatómátrixát és ennek alapján indokolja meg, hogy milyen típusú az egyenlet (elliptikus/parabolikus/hiperbolikus). (2 pont)
2. Definiálja a $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergencia fogalmát. (2 pont)
3. Definiálja egy disztribúció sorozatfolytonosságának fogalmát. (2 pont)
4. Definiálja az alapmegoldás fogalmát. (2 pont)
5. Definiálja disztribúciók direkt szorzatának fogalmát. (2 pont)
6. Definiálja a gradiens és a divergencia fogalmát, majd adja meg a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátort parciális deriváltak segítségével. (3 pont)
7. Mondja ki Green első formuláját a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátorra. (3 pont)
8. Definiálja a Green-függvény fogalmát. (3 pont)
9. Írja fel egy $u \in H_0^1(\Omega)$ függvény eredeti és ekvivalens normáját multiindexes jelölés használata nélkül. (3 pont)
10. Definiálja a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ peremérték-feladat gyenge alakjának fogalmát. (3 pont)

Témakör kifejtése: hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok.

1. Írja fel a hullámegyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot és adja meg, hogy milyen térben keresünk megoldást. (2+2 pont)
2. Fogalmazza meg (az esetlegesen szükséges előkészületekkel együtt) azt a tételt, amely arról szól, hogy a hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladat egy klasszikus megoldása milyen disztribúciós egyenletet elégít ki. Bizonyítsa be a tételt (annyit, amennyit előadáson). (4+10 pont)
3. Definiálja, hogy az előbbi tétel által motiválva mit nevezünk a hullámegyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatnak. Mondja ki az általánosított feladat megoldhatóságáról szóló tételt. (2+2 pont)
4. Az előbbi tétel segítségével bizonyítsa be, hogy a klasszikus feladatnak legfeljebb egy megoldása van. A képletjegyzék mely formulája szolgáltatja az egydimenziós feladat klasszikus megoldását? (2+1 pont)

Képletgyűjtemény.

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) f(\tau,\xi)\, d\xi\, d\tau + \\ + \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) g(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\tau\, d\xi + \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{ha } \ t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } \ t\le 0, x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{ha } n=2, x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n}\cdot\frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{ha } n\ge 3, x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}. \end{cases}$$

Témakör kifejtése: hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok.

1. Írja fel a hullámegyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot és adja meg, hogy milyen térben keresünk megoldást. (2+2 pont)
2. Fogalmazza meg (az esetlegesen szükséges előkészületekkel együtt) azt a tételt, amely arról szól, hogy a hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladat egy klasszikus megoldása milyen disztribúciós egyenletet elégít ki. Bizonyítsa be a tételt (annyit, amennyit előadáson). (4+10 pont)
3. Definiálja, hogy az előbbi tétel által motiválva mit nevezünk a hullámegyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatnak. Mondja ki az általánosított feladat megoldhatóságáról szóló tételt. (2+2 pont)
4. Az előbbi tétel segítségével bizonyítsa be, hogy a klasszikus feladatnak legfeljebb egy megoldása van. A képletjegyzék mely formulája szolgáltatja az egydimenziós feladat klasszikus megoldását? (2+1 pont)

Képletgyűjtemény.

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) f(\tau,\xi)\, d\xi\, d\tau + \\ + \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) g(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\tau\, d\xi + \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{ha } \ t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } \ t\le 0, x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{ha } n=2, x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n}\cdot\frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{ha } n\ge 3, x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}. \end{cases}$$