

1. Tekintsük a

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\text{-ben,} \\ v(0, x) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n), \\ \partial_t v(0, x) = f(\tau, x) & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

feladatcsaládot, ahol $f \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ és $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ paraméter. Tegyük fel, hogy minden $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ esetén a feladat $v(\cdot, \cdot; \tau)$ megoldására $v, \partial_t^2 v, \Delta v \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+)$. Értelmezzük ekkor az u függvényt a következőképpen:

$$u(t, x) = \int_0^t v(t - \tau, x; \tau) d\tau.$$

Igazoljuk, hogy $\partial_t^2 u - \Delta u = f$ $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ -ben, $u(0, x) = 0$ és $\partial_t u(0, x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$), azaz u megoldása a második részfeladatnak! (Duhamel-elv)

2. Legyen w a következő feladat megoldása:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\text{-ben,} \\ w(0, x) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n), \\ \partial_t w(0, x) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy $w \in C^3(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n)$, és legyen ekkor $u(t, x) = \partial_t w(t, x)$ ($(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$). Igazoljuk, hogy $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ -ben, $u(0, x) = g(x)$ és $\partial_t u(0, x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$), azaz u megoldása a harmadik részfeladatnak!

3. Oldjuk meg $n = 1$ esetén az első részfeladatot!

4. Bizonyítsuk be, hogy $n = 1$ és $g \in C^2(\mathbb{R})$ esetén a harmadik részfeladat megoldása $u(t, x) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t))$ ($(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$).

5. Oldjuk meg a következő Cauchy-feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = t - x & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = \sin x & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t u(0, x) = \cos x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

6. Legyen u a következő feladat megoldása:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = g(x) & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t u(0, x) = h(x) & (x \in \mathbb{R}), \end{cases}$$

ahol $g, h \in C(\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy ha $\text{supp } g, \text{supp } h \subset [a, b]$, akkor $\text{supp } u(t, \cdot) \subset [a - t, b + t]$ minden $t > 0$ esetén. (Véges sebességű hullámterjedés)

7. Igazoljuk $n = 1$ esetén, hogy a hiperbolikus Cauchy-feladat u megoldása folytonosan függ h -től a következő értelemben: ha $h_1, h_2 \in C(\mathbb{R}^n)$, amelyekre $|h_1(x) - h_2(x)| \leq \varepsilon$ ($x \in \mathbb{R}$), akkor a Cauchy-feladat megfelelő u_1, u_2 megoldásaira $|u_1(tx) - u_2(tx)| \leq \varepsilon t$ ($(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$).

8. Mutassuk meg $n = 1$ esetén, hogy a hiperbolikus Cauchy-feladat u megoldása folytonosan függ f -től a következő értelemben: ha $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, amelyekre $|f_1(t, x) - f_2(t, x)| \leq \varepsilon$ ($(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$), akkor $|u_1(t, x) - u_2(t, x)| \leq \frac{\varepsilon t^2}{2}$ ($(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$).

*9. Legyen $u \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times [0, 1])$ az egydimenziós $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ hullámegyenlet egy olyan megoldása, amelyre $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ minden $t \geq 0$ esetén (mindkét végén rögzített húr). Mutassuk meg, hogy ekkor az

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\partial_t u(t, x))^2 + (\partial_x u(t, x))^2 dx$$

formulával értelmetten függvény (mechanikai energia) valójában nem függ t -től.