A 6. feladatsor megoldása

III. éves alkmat parcdiff 2017. tavasz

1. Tegyük fel, hogy $g \in C(\mathbb{R}^n)$ korlátos, és legyen ekkor $u(t,x) = \dfrac{1}{(\sqrt{\pi}\,)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta$.

a) Bizonyítsuk be, hogy $u(0,x) = g(x)$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén.

b) Legyen $n = 1$, továbbá tegyük fel, hogy $g \in C^2(\mathbb{R})$, amelyre g, g', g'' korlátosak. Mutassuk meg, hogy ekkor $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$-ben.

Megoldás. a) Először is jegyezzük meg, hogy g korlátossága miatt az integrál létezik és véges. Másrészt világos (paraméteres improprius integrálok folytonossága miatt), hogy

$$u(0,x) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x)\, d\eta = g(x) \frac{1}{(\sqrt{\pi}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2}\, d\eta = g(x),$$

ahol felhasználtuk, hogy $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2}\, d\eta = (\sqrt{\pi}\,)^n$ (lásd az 5. feladatsor 3. feladatát).

b) A feltételekből adódóan a deriválást elvégezhetjük úgy, hogy az integrandust deriváljuk (paraméteres improprius integrálok differenciálhatósága). Ekkor egyszerű számolással adódik, hogy

$$\partial_t u(t,x) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(\sqrt{\pi}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} \partial_j g(x - 2\sqrt{t}\eta) \frac{\eta_j}{\sqrt{t}}\, d\eta$$

és

$$\begin{aligned}
\partial_{x_j}^2 u(t,x) &= \frac{1}{(\sqrt{\pi}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} \partial_j^2 g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta = \\
&= \frac{1}{(\sqrt{\pi}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\left[-\frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-|\eta|^2} \partial_j g(x - 2\sqrt{t}\eta) \right]_{\eta_j = -\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} \partial_j g(x - 2\sqrt{t}\eta) \frac{\eta_j}{\sqrt{t}}\, d\eta_j \right),
\end{aligned}$$

ahol egy parciális integrálást hajtottunk végre. Vegyük észre, hogy a szögletes zárójelbeli függvény $|\eta| \to \infty$ esetén 0-hoz tart, hiszen $\partial_j g$ korlátos, a maradék pedig 0-hoz tart, ha $|\eta| \to \infty$. Így a fentiek alapján

$$\Delta u(t,x) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(\sqrt{\pi}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} \partial_j g(x - 2\sqrt{t}\eta) \frac{\eta_j}{\sqrt{t}}\, d\eta$$

tehát $\partial_t u = \Delta u$ $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$-ben.

A későbbi példák kedvéért érdemes meggondolni, hogy a fenti számítások mind érvényben maradnak, ha a g függvény és deriváltjai „nem nőnek túl gyorsan” (például legfeljebb $e^{c|x|}$ nagyságrendűek).

Megjegyezzük, hogy a következőképpen is érvelhettünk volna. A $\xi = x - 2\sqrt{t}\eta$ koordinátatranszformációval kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(\sqrt{\pi}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t}\,)^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} g(\xi)\, d\xi.$$

Az 5. feladatsor 4. feladatában pedig beláttuk, hogy a $(t,x) \mapsto \frac{1}{(2\sqrt{\pi t}\,)^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}$ függvény (pontosabban ennek egy eltoltja) kielégíti a hővezetési egyenletet, így a feltételek miatt a függvény paraméter szerinti integrálja is. Ebben az esetben elég a $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ feltételezés, nincs szükség a deriválhatóságra. Jegyezzük meg, hogy az u megoldás minden esetben $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ (sőt analitikus), függetlenül a g függvény simaságától. A hővezetési egyenlet e tulajdonságát szokás parabolikus simításnak nevezni.

Végül egy fontos dolgot hangsúlyoznunk kell. A hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatnak nem egyértelmű a megoldása, sőt végtelen sok megoldása van, a fenti formula ezek közül ad meg egyet, a fizikailag reálisat. Végtelen sok megoldás létezésére Andrej Nyikolajevics Tyihonov (1906–1993) adott egyszerű konstrukciót, ezek a megoldások $|x| \to \infty$ esetén „gyöorsan” növekednek ($e^{|x|^\alpha}$ nagyságrendben). Ha ennél lassabb növekedést kötünk ki, akkor a megoldás egyértelmű, és a fenti formula is érvényes. Megemlítjük, hogy bár végtelen sok megoldás van, David Vernon Widder (1898–1990) maerikai matematikus igazolta, hogy nemnegatív megoldás legfeljebb egy. A nemnegativitási feltétel logikus, ha u az abszolút hőmérsékletet jelenti.

A továbbiakban, ha a hővezetési egyenlethez tartozó Cauchy-feladat megoldásáról beszélünk, akkor a fenti formulával értelmezett megoldásra gondolunk.

2. Oldjuk meg az alábbi parabolikus Cauchy-feladatokat!

a) $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$

b) $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = \cos x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$

Megoldás. Használjuk az első részfeladatra vonatkozó megoldóképletet, amelyet az 1. feladatban bizonyítottunk.

a) $u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2}(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} x\, d\eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} 2t\eta\, d\eta = x$, felhasználva, hogy $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2}\, d\eta = 1$, másrészt a második integrandus páratlan függvény, ezért az integrálja nullával egyenlő az origóra szimmetrikus intervallumokon.

b) A megoldóképlet alapján $u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} \cos(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta$. Alkalmazzuk a cos függvényre vonatkozó $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ addíciós formulát. Ekkor

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} \cos(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} \left(\cos x \cos 2\sqrt{t}\eta + \sin x \sin 2\sqrt{t}\eta\right)\, d\eta =$$

$$= \cos x \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} \cos 2\sqrt{t}\eta\, d\eta = e^{-t}\cos x$$

adódik, felhasználva egyrészt, hogy a sin függvény páratlan, így az integrálja nullával egyenlő az origóra szimmetrikus intervallumokon, másrészt pedig a 4. feladatsor 5. feladatában szereplő

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} \cos by\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

összefüggést $a = 1$, $b = 2\sqrt{t}$ választással. Végeredményben tehát $u(t,x) = e^{-t}\cos x$.

3. Legyen $n = 1$, $f = 0$, és tekintsük a parabolikus Cauchy-feladatot.

a) Tegyük fel, hogy $g \in C(\mathbb{R})$ korlátos. Igazoljuk, hogy ha $g(x) \geq 0$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor a Cauchy-feladat u megoldására $u(x) \geq 0$ $(x \in \mathbb{R})$.

b) Tegyük fel, hogy $g \in C^2(\mathbb{R})$ és g, g', g'' korlátos. Igazoljuk, hogy ha g konvex, akkor minden $t > 0$ esetén a Cauchy-feladat u megoldására $u(t,\cdot)$ is konvex.

Megoldás. a) Ha $g(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor $u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta \geq 0$, hiszen nemnegatív függvény integrálja nemnegatív.

b) Ha g konvex függvény, akkor $g''(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, így $\partial_x^2 u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} g''(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta \geq 0$, azaz $u(t,\cdot)$ is konvex függvény.

Megjegyezzük, hogy hasonlóan igazolható számos egyéb tulajdonság öröklődése a kezdeti feltételről a megoldásra.

4. Bizonyítsuk be, hogy a parabolikus Cauchy-feladat u megoldása folytonosan függ g-től a következő értelemben: ha g_1, $g_2 \in C(\mathbb{R}^n)$ korlátosak, amelyekre $|g_1(x) - g_2(x)| \leq \varepsilon$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, akkor a parabolikus Cauchy-feladat megfelelő u_1, u_2 megoldásaira $|u_1(t,x) - u_2(t,x)| \leq \varepsilon$ $((t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$.

Megoldás. A feltételek alapján a megoldóképlet felhasználásával adódik, hogy

$$|u_1(t,x) - u_2(t,x)| \leq \frac{1}{(\sqrt{\pi}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} |g_1(x) - g_2(x)|\, d\eta \leq \frac{\varepsilon}{(\sqrt{\pi}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2}\, d\eta = \varepsilon.$$

5. Legyen $n = 1$, $f = 0$, $g \in C(\mathbb{R})$, és tegyük fel, hogy $\operatorname{supp} g \subset [a,b]$, valamint $g|_{[a,b]} > 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a parabolikus Cauchy-feladat u megoldására $u(t,x) > 0$ minden $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ esetén! (Végtelen sebességű hőterjedés)

Megoldás. A feltételekből következően $g(x - 2\sqrt{t}\eta) \geq 0$, ha $\eta \in I = \left[\frac{x-b}{2\sqrt{t}}, \frac{x-a}{2\sqrt{t}}\right]$, és ezen intervallumon kívüli η-kra $g(x - 2\sqrt{t}\eta) = 0$. Ekkor $u(t,x) = \int_I e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta > 0$, hiszen pozitív függvény integrálja pozitív.

*6. Legyen $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $\partial_1 g$ létezik és folytonos $\mathbb{R}^2$-en. Értelmezzük az $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $f(x) = \int_a^x g(x,y)\, dy$, ahol $a \in \mathbb{R}$ rögzített. Mutassuk meg, hogy $f'(x) = g(x,x) + \int_a^x \partial_1 g(x,y)\, dy$.

Megoldás. A feladat beadható, ezért a megoldást nem árulom el.

7. Tekintsük a

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\text{-ben}, \\ v(0,x) = f(\tau,x) & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

feladatcsaládot, ahol $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ paraméter. Tegyük fel, hogy minden $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ esetén a feladat $v(\cdot,\cdot;\tau)$ megoldására $v, \partial_t v,\ \Delta v \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+)$. Értelmezzük ekkor az u függvényt a következőképpen:

$$u(t,x) = \int_0^t v(t-\tau, x; \tau) d\tau.$$

Bizonyítsuk be, hogy $\partial_t u - \Delta u = f \ \ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$-ben és $u(0,x) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, azaz u megoldása a második részfeladatnak. (Duhamel-elv)

Megoldás. Világos, hogy $u(0,x) = \displaystyle\int_0^0 (\dots) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Ezenkívül a 6. feladat deriválási szabályát alkalmazva

$$\partial_t u(t,x) = v(0,x;t) + \int_0^t \partial_t v(t-\tau, x;\tau)\, d\tau = f(t,x) + \int_0^t \partial_t v(t-\tau,x;\tau)\, d\tau,$$

hiszen $v(\cdot,\cdot;\tau)$ megoldása a $(*)$ feladatnak $\tau = t$ paraméter mellett, így $v(0,x;t) = f(t,x)$. Ezenkívül $\Delta u(t,x) = \displaystyle\int_0^t \Delta v(t-\tau,x;\tau)\, d\tau$, mert a feltételekből következően az integrál deriváltja az integrandus derváltjának integrálja. A fentieket összevetve

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = \int_0^t (\partial_t v(t-\tau,x;\tau) - \Delta v(t-\tau,x;\tau))\, d\tau = f(t,x),$$

ugyanis $\partial_t v(t-\tau,x;\tau) - \Delta v(t-\tau,x;\tau) = 0$ minden $\tau \in \mathbb{R}^+$ esetén, hiszen $v(\cdot,\cdot;\tau)$ kielégíti a $(*)$ feladatot. Megjegyezzük, hogy az 1. feladatban szereplő formula segítségével megadhatjuk a $v(\cdot,\cdot;\tau)$ függvények konkrét alakját. Nevezetesen

$$v(t,x;\tau) = u(t,x) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} f(\tau, x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta = u(t,x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} f(\tau,\xi)\, d\xi,$$

ahol a $\xi = x - 2\sqrt{t}\eta$ helyettesítést hajtottuk végre (továbbá felhasználtuk, hogy a transzformáció Jacobi-determinánsa $\frac{1}{(2\sqrt{t}\,)^n}$). Ennek megfelelően a 2. részfeladat megoldása

$$u_2(t,x) = \int_0^t \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} f(\tau,\xi)\, d\xi\, d\tau.$$

Így a

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = f & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\text{-ben}, \\ \quad v(0,x) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

parabolikus Cauchy-feladat megoldása

$$u(t,x) = \int_0^t \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} f(\tau,\xi)\, d\xi\, d\tau + \frac{1}{(2\sqrt{\pi t}\,)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} g(\xi)\, d\xi.$$

Megjegyezzük, hogy a Duhamel-elv sokkal általánosabban is érvényes, tetszőleges $\partial_t u - Lu = f$ alakú egyenletekre is, ahol L állandó együtthatós differenciáloperátor. Sőt, hiperbolikus egyenletekre is kiterjeszthető az elv, lásd a következő feladatsort. Valójában közönséges differenciálegyenletek esetében is érvényes, az $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots a_1 y' + a_0 y = f$, $y^{(j)}(0) = 0$ $(j = 0,\dots,n-1)$ kezdetiérték-feladat megoldását megkapjuk az $y_\tau^{(n)} + a_{n-1}y_\tau^{(n-1)} + \dots a_1 y_\tau' + a_0 y_\tau = 0$, $y_\tau^{(j)}(0) = 0$ $(j = 1,\dots,n-1)$, $y_\tau(0) = f(\tau)$ feladat y_τ megoldásából az $y(t) = \int_0^t y_\tau(t-\tau)\, d\tau$ integrál segítségével. Más szóval $y(t) = \int_0^t f(\tau)\tilde{y}(t-\tau)\, d\tau$, ahol $\tilde{y}$ az $\tilde{y}^{(n)} + a_{n-1}\tilde{y}^{(n-1)} + \dots a_1\tilde{y}' + a_0\tilde{y} = f$, $\tilde{y}^{(j)}(0) = 0$ $(j = 0,\dots,n-1)$ kezdetiérték-feladat megoldása, vagyis $\tilde{y}$ (a negatív félegyenesre 0-ként kiterjesztve) éppen alapmegoldása a differenciáloperátorunknak (és így az y megoldást valóban az alapmegoldás és a jobb oldal konvolúciójaként nyerjük).

Jean-Marie Constant Duhamel (1797–1872) francia fizikus és matematikus, aki többek között a hővezetés kapcsán foglalkozott differenciálegyenletekkel. Az elvet valószínűleg nem ő fedezte fel, de a hővezetésről szóló munkái nyomán később róla nevezték el.

8. Oldjuk meg a következő parabolikus Cauchy-feladatokat!

a) $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = x + t & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ \quad u(0,x) = e^x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$

b) $\begin{cases} \partial_t u - 4\partial_x^2 u + u = e^x & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ \quad u(0,x) = x^2 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$

Megoldás. a) Az első részfeladat megoldása a megoldóképletünk alapján

$$u_1(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \cdot e^{x - 2\sqrt{t}\eta}\, d\eta = e^{x+t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\eta + \sqrt{t}\,)^2}\, d\eta = e^{x+t},$$

felhasználva, hogy $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta = \sqrt{\pi}$ (lásd az 5. feladatsor 4. feladatát). A második részfeladat megoldását a Duhamel-elv segítségével kereshetjük meg. Segédfeladatunk a következő:

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ v(0,x) = x + \tau & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

A fenti Cauchy-feladat megoldása

$$v(t,x;\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}(x+\tau-2\sqrt{t}\eta)\,d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}(x+\tau)\,d\eta - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\eta\,d\eta = x+\tau,$$

hiszen a második integrál páratlan függvény integrálja, tehát nullával egyenlő, az elsőben pedig az 5. feladatsor 4. feladatát használhatjuk. Így a 2. részfeladat megoldása $u_2(t,x) = \int_0^t (x+\tau)\,d\tau = tx + \frac{t^2}{2}$. A fentiek alapján a Cauchy-feladat megoldása a feladat linearitása miatt a két részfeladat megoldásának összege, vagyis $u(t,x) = e^{x+t} + tx + \frac{t^2}{2}$.

b) Először hozzuk a feladatot a „hagyományos” alakra. Helyettesítsünk a feladatban x helyett $2x$-et, és legyen $v(t,x) = u(t,2x)$, ekkor v-re a következő Cauchy-feladatot kapjuk:

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x^2 v + v = e^{2x} & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ v(0,x) = 4x^2 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Szorozzuk az egyenlet e^t-vel, és legyen $w(t,x) = e^t v(t,x)$, ekkor w-re a következő Cauchy-feladatot nyerjük (felhasználva, hogy $w(0,x) = v(0,x)$):

$$\begin{cases} \partial_t w - \partial_x^2 w = e^{2x+t} & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ w(0,x) = 4x^2 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Ez már a hagyományos alakú parabolikus Cauchy-feladat. Az 1. részfeladat megoldása a formula szerint

$$w_1(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}(x-2\sqrt{t}\eta)^2\,d\eta = 4x^2\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta - 16\sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\eta\,d\eta + 16t\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\eta^2\,d\eta.$$

Vegyük észre, hogy az $\eta \mapsto e^{-\eta^2}\eta$ függvény páratlan volta miatt a fenti egyenlőség jobb oldalán szereplő második integrál értéke nulla. Az első integrál értéke $4x^2$, felhasználva, hogy $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta = \sqrt{\pi}$ (lásd az 5. feladatsor 4. feladatát). A harmadik integrálban pedig egy parciális integrálást hajthatunk végre az alábbi módon:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\eta^2\,d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2}e^{-\eta^2}\eta\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta = \frac{1}{2},$$

ahol felhasználtuk, hogy $e^{-\eta^2}\eta \to 0$ valahányszor $|\eta| \to +\infty$, hiszen az exponenciális nullához tartás „legyőzi” a polinomiális végtelenbe tartást. Végül tehát $u_1(t,x) = 4x^2 + 8t$. A 2. részfeladat megoldásához bevezetjük a következő segédfeladatot:

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ v(0,x) = e^{2x+\tau} & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Ennek megoldása

$$v(t,x;\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \cdot e^{2x-4\sqrt{t}\eta+\tau}\,d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\eta-2\sqrt{t})^2+4t+2x+\tau}\,d\eta = e^{2x+\tau+4t}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}d\xi = e^{2x+\tau+4t}.$$

Ekkor a Duhamel-elv szerint a 2. részfeladat megoldása

$$u_2(t,x) = \int_0^t e^{2x+\tau+4(t-\tau)}\,d\tau = e^{2x+4t}\int_0^t e^{-3\tau}\,d\tau = -\frac{1}{3}e^{2x+4t}(e^{-3t}-1).$$

A linearitás miatt a Cauchy-feladatunk megoldása a két részfeladat megoldásainak összege, azaz $w(t,x) = 4x^2 + 8t + \frac{1}{3}e^{2x+4t} - \frac{1}{3}e^{2x+t}$, és így $u(t,x) = x^2e^{-t} + 8te^{-t} + \frac{1}{3}e^{x+3t} - \frac{1}{3}e^x$.