

6. feladatsor  
III. éves alkimat parcdiff 2017. tavasz

1. Tegyük fel, hogy  $g \in C(\mathbb{R}^n)$  korlátos, és legyen ekkor  $u(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta) d\eta$ .
  - a) Bizonyítsuk be, hogy  $u(0, x) = g(x)$  minden  $x \in \mathbb{R}^n$  esetén.
  - b) Tegyük fel, hogy  $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ , amelyre  $g, \partial_j g, \partial_j^2 g$  ( $j = 1, \dots, n$ ) korlátosak. Mutassuk meg, hogy ekkor  $\partial_t u - \Delta u = 0$   $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ -ben.
2. Oldjuk meg az alábbi parabolikus Cauchy-feladatokat!
  - a) 
$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$
  - b) 
$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = \cos x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$
3. Legyen  $n = 1, f = 0$ , és tekintsük a parabolikus Cauchy-feladatot.
  - a) Tegyük fel, hogy  $g \in C(\mathbb{R})$  korlátos. Igazoljuk, hogy ha  $g(x) \geq 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), akkor a Cauchy-feladat  $u$  megoldására  $u(x) \geq 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).
  - b) Tegyük fel, hogy  $g \in C^2(\mathbb{R})$  és  $g, g', g''$  korlátos. Igazoljuk, hogy ha  $g$  konvex, akkor minden  $t > 0$  esetén a Cauchy-feladat  $u$  megoldására  $u(t, \cdot)$  is konvex.
4. Bizonyítsuk be, hogy a parabolikus Cauchy-feladat  $u$  megoldása folytonosan függ  $g$ -től a következő értelemben: ha  $g_1, g_2 \in C(\mathbb{R}^n)$  korlátosak, amelyekre  $|g_1(x) - g_2(x)| \leq \varepsilon$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ), akkor a parabolikus Cauchy-feladat megfelelő  $u_1, u_2$  megoldásaira  $|u_1(t, x) - u_2(t, x)| \leq \varepsilon$  ( $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ ).
5. Legyen  $n = 1, f = 0, g \in C(\mathbb{R})$ , és tegyük fel, hogy  $\text{supp } g \subset [a, b]$ , valamint  $g|_{[a, b]} > 0$ . Bizonyítsuk be, hogy ekkor a parabolikus Cauchy-feladat  $u$  megoldására  $u(t, x) > 0$  minden  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  esetén! (Végtelen sebességű hőterjedés)
- \*6. Legyen  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, amelyre  $\partial_1 g$  folytonos  $\mathbb{R}^2$ -en. Értelmezzük az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt úgy, hogy  $f(x) = \int_a^x g(x, y) dy$ , ahol  $a \in \mathbb{R}$  rögzített. Mutassuk meg, hogy  $f'(x) = g(x, x) + \int_a^x \partial_1 g(x, y) dy$ .
7. Tekintsük a

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\text{-ben,} \\ v(0, x) = f(\tau, x) & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

feladatcsaládot, ahol  $\tau \in \mathbb{R}_0^+$  paraméter. Tegyük fel, hogy minden  $\tau \in \mathbb{R}_0^+$  esetén a feladat  $v(\cdot, \cdot; \tau)$  megoldására  $v, \partial_t v, \Delta v \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+)$ . Értelmezzük ekkor az  $u$  függvényt a következőképpen:

$$u(t, x) = \int_0^t v(t - \tau, x; \tau) d\tau.$$

Bizonyítsuk be, hogy  $\partial_t u - \Delta u = f$   $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ -ben és  $u(0, x) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ), azaz  $u$  megoldása a második részfeladatnak. (Duhamel-elv)

8. Oldjuk meg a következő parabolikus Cauchy-feladatokat!
  - a) 
$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = x + t & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = e^x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$
  - b) 
$$\begin{cases} \partial_t u - 4\partial_x^2 u + u = e^x & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = x^2 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$