

8. feladatsor
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2017. ősz

1. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \leq p \leq \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor $W^{1,p}(a, b) \subset L^\infty(a, b)$, továbbá a beágyazás operátora korlátos.
2. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \leq p \leq \infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor $W^{1,p}(a, b) \subset C([a, b])$, továbbá a beágyazás operátora korlátos. (A $W^{1,p}(a, b) \subset C([a, b])$ tartalmazást úgy értjük, hogy minden $u \in W^{1,p}(a, b)$ függvényhez létezik $\tilde{u} \in C([a, b])$ függvény, amelyre $u = \tilde{u}$ m.m. az $[a, b]$ intervallumon.)
3. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \leq p \leq \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $u \in W^{1,p}(a, b)$ esetén érvényes a Newton–Leibniz-formula, vagyis (u folytonos reprezentánsát tekintve)

$$\int_a^b u' = u(b) - u(a).$$

4. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \leq p \leq \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor a $W^{1,p}(a, b)$ tér pontosan azon $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekből áll, amelyek abszolút folytonosak és (a m.m. értelmezett klasszikus deriváltra) $u' \in L^p(a, b)$. Speciálisan, $W^{1,1}(a, b)$ pontosan az $[a, b]$ intervallumon abszolút folytonos függvényekből áll.
5. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \leq p \leq \infty$. Lássuk be, hogy ekkor a $W^{k,p}(a, b)$ tér pontosan azon $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekből áll, amelyek $(k-1)$ -szer folytonosan differenciálhatók az $[a, b]$ intervallumon, $u^{(k-1)}$ abszolút folytonos, és (a m. m. értelmezett klasszikus deriváltra) $u^{(k)} \in L^p(a, b)$.
6. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \leq p \leq \infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor $W^{1,p}(a, b) \subset C^{0,1-\frac{1}{p}}([a, b])$, továbbá a beágyazás operátora korlátos. Igazoljuk, hogy $p > 1$ esetén az $u(x) = x^{1-\frac{1}{p}}$ függvényre $u \in C^{0,1-\frac{1}{p}}([0, 1])$, de $u \notin W^{1,p}(0, 1)$.
7. Tegyük fel, hogy $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $W^{1,\infty}(a, b)$ tér az $[a, b]$ intervallumon Lipschitz-folytonos függvényekből áll.
8. Legyen $1 \leq p < \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor $W^{1,p}(\mathbb{R}) \subset C_*(\mathbb{R})$ (ahol $C_*(\mathbb{R})$ azon $u \in C(\mathbb{R})$ függvények halmaza, amelyekre $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$), továbbá a beágyazás operátora korlátos.
9. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \leq p \leq \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $u, v \in W^{1,p}(a, b)$ esetén $uv \in W^{1,p}(a, b)$, sőt $(uv)' = u'v + uv'$. Ezenkívül létezik $c > 0$ konstans, hogy minden $u, v \in W^{1,p}(a, b)$ esetén $\|uv\|_{W^{1,p}(a,b)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(a,b)}\|v\|_{W^{1,p}(a,b)}$.