

6. feladatsor  
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2017. ősz

1. Legyen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  korlátos, nyílt halmaz, amelyre  $0 \in \Omega$ , és  $\Omega^* := \Omega \setminus \{0\}$ . Tegyük fel, hogy az  $u \in C^1(\Omega^*)$  függvényre

$$\int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n |\partial_j u|^2 < \infty,$$

továbbá  $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-1} u(x) = 0$ . Mutassuk meg, hogy ekkor

- a)  $u \in H^1(\Omega)$ , és az elsőrendű általánosított deriváltjai megegyeznek az (origón kívül  $\Omega$ -n mindenütt létező) klasszikus elsőrendű deriváltakkal.
  - b)  $\sin u \in H^1(\Omega)$ , és az elsőrendű általánosított deriváltjai megegyeznek az (origón kívül  $\Omega$ -n mindenütt létező) klasszikus elsőrendű deriváltakkal.
2. Legyen  $\Omega := B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ , ahol  $0 < R < \infty$ . Milyen  $\alpha \in \mathbb{R}$  esetén teljesül, hogy az  $u(x) := |x|^\alpha$  függvényre  $u \in L^1(\Omega)$ ?
3. Legyen  $\Omega := B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ . Mutassuk meg, hogy ha  $n \geq 3$ ,  $0 < R < \infty$  és  $1 - \frac{n}{2} < \alpha < 0$ , akkor az  $u(x) := |x|^\alpha$  függvényre  $u \in H^1(\Omega)$ , de  $u \notin L^\infty(\Omega)$  és  $u \notin C(\Omega)$ . Igazoljuk, hogy ugyanilyen feltételek mellett a  $v(x) := \sin |x|^\alpha$  függvényre  $v \in H^1(\Omega)$ ,  $v \in L^\infty(\Omega)$ , de  $v \notin C(\Omega)$ .
4. Legyen  $\Omega := B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ . Mutassuk meg, hogy ha  $n \geq 3$ ,  $0 < R < 1$ , akkor az  $u(x) := \log |\log |x||$  függvényre  $u \in H^1(\Omega)$ , de  $u \notin L^\infty(\Omega)$  és  $u \notin C(\Omega)$ . Igazoljuk, hogy ugyanilyen feltételek mellett a  $v(x) := \sin \log |\log |x||$  függvényre  $v \in H^1(\Omega)$ ,  $v \in L^\infty(\Omega)$ , de  $v \notin C(\Omega)$ .
5. Legyen  $\Omega := B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ . Igazoljuk, hogy ha  $0 < R < 1$ ,  $n = 2$ ,  $0 < \beta < 1/2$ , (vagy  $n \geq 3$  és  $\beta > 0$ ) akkor az  $u(x) := |\log |x||^\beta$  függvényre  $u \in H^1(\Omega)$ , de  $u \notin L^\infty(\Omega)$  és  $u \notin C(\Omega)$ . Mutassuk meg, hogy ugyanilyen feltételek mellett a  $v(x) := \sin |\log |x||^\beta$  függvényre  $v \in H^1(\Omega)$ ,  $v \in L^\infty(\Omega)$ , de  $v \notin C(\Omega)$ .
6. Legyen  $\Omega := B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $(r_j) \subset \Omega$ , és értelmezzük az  $u$  függvényt a következőképpen:

$$u(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} |x - r_j|^\alpha \quad (x \in \Omega).$$

Bizonyítsuk be, hogy  $\alpha > 1 - \frac{n}{2}$  esetén  $u \in H^1(\Omega)$ , továbbá ha  $(r_j) \subset \Omega$  sűrű, és  $\alpha < 0$ , akkor  $u$  az  $\Omega$  tartomány semmilyen nyílt részhalmazán sem korlátos.