5. feladatsor

Alkmat/Mat MSc parcdiff 2017. ősz

1. Mutassuk meg, hogy az $u^{(m)} + a_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u$ egydimenziós differenciáloperátor egy $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ alapmegoldása
$$E(t) := \begin{cases} y(t), \text{ ha } t > 0, \\ 0, \quad\ \text{ ha } t \le 0, \end{cases}$$
ahol $y \in C^m(0,\infty) \cap C^{m-1}([0,\infty))$, amelyre
$$y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{a } (0,\infty)\text{-en},$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \dots, y^{(m-2)}(0) = 0,\ y^{(m-1)}(0) = 1.$$

2. Határozzuk meg a következő egydimenziós differenciáloperátorok egy-egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ alapmegoldását!

   a) $u' + au$ $(a \in \mathbb{R})$

   b) $u'' + a^2 u$ $(a \in \mathbb{R})$

3. Határozzuk meg a következő közönséges differenciálegyenletek egy-egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldását az alapmegoldások segítségével (ahol H a Heaviside-függvényt jelöli)!

   a) $u'' - 2u' + 2u = H$

   b) $u'' - 2u' - 3 = H$

   c) $u'' - 2u' + u = H$

4. Keressük meg az $u'' - au' = \delta_1'$ egyenlet egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldását, ahol $a \in \mathbb{R}$ paraméter. Igaz-e, hogy van reguláris disztribúció megoldása az egyenletnek?

5. A Fourier-transzformáció segítségével adjuk meg a következő n-dimenziós (ahol n az x változó dimenzióját jelöli) differenciáloperátorok egy-egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ alapmegoldását!

   a) $Lu = \partial_t u + b \cdot \operatorname{grad} u + cu, \quad b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ (transzportegyenlet)

   b) $Lu = \partial_t^2 u - \Delta u, \quad n = 1, 3$ (hullámegyenlet)

6. Az alapmegoldások felhasználásával határozzuk meg az $Lu = f$ egyenlet egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ megoldását, ahol $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, amelyre $t \le 0, x \in \mathbb{R}^n$ esetén $f(t,x) = 0$, továbbá

   a) $Lu = \partial_t u + b \cdot \operatorname{grad} u + cu, \quad b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ (transzportegyenlet);

   b) $Lu = \partial_t^2 u - \Delta u, \quad n = 1, 3$ (hullámegyenlet).