

4. feladatsor
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2017. ősz

1. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \chi_{[a,b]}$ (az $[a, b]$ intervallum karakterisztikus függvénye). Számítsuk ki f Fourier-transzformáltját!

2. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$.

a) Igazoljuk, hogy $(\mathcal{F}(f))(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \xi^2}$.

b) Bizonyítsuk be, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x\xi)}{1 + \xi^2} d\xi = \pi e^{-|x|}$.

3. Számítsuk ki az alábbi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények Fourier-transzformáltjait!

a) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = xe^{-x^2}$

4. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ és α multiindex. Igazoljuk, hogy az alábbi disztribúciók mindegyike temperált (azaz $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ -beli), majd számítsuk ki a Fourier-transzformáltjukat!

a) δ_a

b) 1

c) $\partial^\alpha \delta_a$

d) x^α

e) $\delta_{S_R(0)}$ ($n = 3$)

5. Igazoljuk, hogy $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g).$$

6. Tegyük fel, hogy az $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvényre $f * f = f$. Mutassuk meg, hogy ekkor $f = 0$ m. m. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $f * g = g$ minden $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ esetén.

7. Határozzuk meg az $y' = 0$ egyenlet összes $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ megoldását!

8. A Fourier-transzformáció segítségével adjuk meg az $xy = 0$ egyenlet összes $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ megoldását! Oldjuk meg a feladatot a Fourier-transzformáció nélkül is!

9. A Fourier-transzformáció segítségével keressük meg az $x^m y = 0$ ($m \in \mathbb{N}$) egyenlet összes $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ megoldását! Oldjuk meg a feladatot a Fourier-transzformáció nélkül is!