2. feladatsor

Alkmat/Mat MSc parcdiff 2017. ősz

1. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, továbbá $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ és $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Hogyan hatnak a $\delta_a \times \delta_b \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$, $\delta_a \times T_g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ és $T_f \times \delta_b \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ disztribúciók egy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ függvényre?

2. Legyenek $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ disztribúciók, továbbá $\alpha \in \mathbb{N}^n$ és $\beta \in \mathbb{N}^m$ multiindexek. Mutassuk meg, hogy ekkor
$$\partial^{(\alpha,\beta)}(u \times v) = (\partial^\alpha u) \times (\partial^\beta v).$$

3. Adjunk meg olyan $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúciókat, amelyekre
   a) $u \times v = T_{\chi_{[0,1]^2}}$, ahol $\chi_{[0,1]^2}$ az egységnégyzet karakterisztikus függvénye;
   b) $(u \times v)(\varphi) = \partial_{12}\varphi(1,1)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén;
   c) $(u \times v)(\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \partial_2\varphi(x,1)\,dx$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén.

4. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Igazoljuk, hogy
$$\operatorname{supp}(u \times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v.$$

5. Adjunk meg olyan $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúciót, amelyre $\operatorname{supp} u = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ és
   a) u előáll $u_1 \times u_2$ alakban, ahol $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.
   b) u nem áll elő $u_1 \times u_2$ alakban, ahol $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

6. Igaz-e, hogy ha az $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ disztribúciók előállnak mint egy $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli és egy $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$-beli disztribúció direkt szorzata, akkor az $u + v$ disztribúció is előáll direkt szorzat alakban?

7. Tegyük fel, hogy az $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ disztribúciókra $u \times v = 0$. Következik-e ebből, hogy $u = 0$ vagy $v = 0$?