

Parciális differenciálegyenletek

Mat/alkmat BSc, 2016. tavasz

Vizsgaidőpontok. Május 20., 31. és június 14. (D. 0-805). A vizsgák 12 órakor kezdődnek és 120 perc áll rendelkezésre. Konzultációt szívesen tartok, az időpontot emailben célszerű egyeztetni, de rövidebb kérdésekre emailben is tudok válaszolni.

Tudnivalók. Az adott vizsgaidőpontra a Neptunban jelentkezni kell, enélkül nem lehet vizsgázni. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható, kivéve a vizsgafeladatsoron szereplő képletgyűjtemény. Üres lap viszont legyen mindenkinél. A vizsga két fő részből áll: 10 rövidebb kérdésből, valamint egy témakört átfogó néhány kérdésből áll (de időben nem lesz kettéválasztva, mindenki úgy osztja be az idejét, ahogy neki kényelmes). A 15 rövid kérdés egy-egy definíció, tétel vagy példa kimondását kéri (olyanokat, amelyek többsége a félév során hangsúlyosan előkerültek, nagy részük gyakorlaton is), bizonyítani általában nem kell semmit. A témakör kifejtésénél a kérdések a fontosabb tételekre kérdeznek rá, de itt is bizonyítani csak azt kell, amelyiket a feladat kifejezetten kéri. A bizonyítással számonkérhető tételeknél a tematikában szerepel a „biz” megjelölés. A ponthatárok úgy vannak kialakítva, hogy a közepesért nem kell bizonyítani, elegendő a fogalmak és tételek pontos kimondása. A bizonyításokban apróbb, a lényegét nem befolyásoló hibák, elírások megengedettek.

Részletes vizsgatematika.

1. Parciális differenciálegyenletek alapfogalmai, típusai, fizikai példák.

- multiindex, PDE „fogalma”, főbb típusai, mellékfeltételek, korrekt kitzűzésű feladat, Hadamard példája, hullámegyenlet és hővezetési egyenlet fizikai és mellékfeltételeik, egyéb példák PDE-kre.

2. Másodrendű lineáris egyenletek kanonikus alakja.

- másodrendű főrészükből lineáris egyenletek osztályozása (elliptikus, hiperbolikus, parabolikus), másodrendű lineáris állandó együtthatós egyenletek kanonikus alakja a különböző típusok esetén.

3. A $C_0^\infty(\Omega)$ függvényosztály.

- $C^k(\Omega)$, tartó, $C_0^\infty(\Omega)$, példa, egységapproximáció, $f * \eta_\varepsilon$ különböző konvergenciái $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén (biz. csak a folytonos eset), következmények: $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű $L^p(\Omega)$ -ban, a konstans 1 függvény $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ -beli kiterjesztése kompakt halmazról, egységosztás tétele .

4. Disztribúciók alapfogalmai, tulajdonságai.

- konvergencia $C_0^\infty(\Omega)$ -ban, disztribúció fogalma, reguláris disztribúció (biz.), Dirac-delta, reguláris disztribúciót m.m. egyértelműen meghatározza melyik $L_{loc}^1(\Omega)$ függvényhez tartozik, a folytonosság ekvivalens jellemzése (biz.), alkalmazás reguláris disztribúcióra (biz.).

5. Disztribúciók egyenlősége, műveletek disztribúciókkal, disztribúciók deriválása.

- disztribúciók lokális és globális egyenlősége, a két egyenlőség ekvivalenciája (biz.), disztribúció tartója, műveletek disztribúciókkal (algebrai műveletek, sima függvényvel való szorzás), $C^k(\mathbb{R}^n)$ -beli függvény deriváltjához tartozó reguláris disztribúció (biz.), derivált definíciója és $\partial^\alpha u$ folytonossága (biz.), példák: Heaviside-függvény (biz.), szakaszonként folytonosan differenciálható függvény deriváltjal,

6. Disztribúciók direkt szorzata.

- függvények direkt szorzata, direkt szorzathoz tartozó reguláris disztribúció (biz.), direkt szorzat definíciója disztribúciók esetében, a definíció jogossága: tétel az $A\psi := v(y \mapsto \psi(x, y))$ operátorról, műveleti tulajdonságok: felcserélés (biz. vázlat), linearitás, derivált, tartó.

7. Disztribúciók konvolúciója.

- függvények konvolúciója, elégséges feltételek a konvolúció létezéséhez, függvények konvolúciójához tartozó reguláris disztribúció, csonkító függvények és konvergenciájuk, a konvolúció definíciója disztribúciók esetében, műveleti tulajdonságok, kommutativitás, derivált, Dirac-deltával vett konvolúció (biz.).

8. Alapmegoldások.

- állandó együtthatós lineáris egyenletek alapmegoldásának definíciója, az egyenlet megoldása tetszőleges jobb oldal esetén (biz.), a megoldás egyértelműsége (biz.), példák: közönséges differenciálegyenlet alapmegoldása, hővezetési egyenlet alapmegoldása tetszőleges dimenzióban, hullámegyenlet alapmegoldása egydimenzióban.

9. Hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok.

- klasszikus Cauchy-feladat értelmezése, klasszikus alak átírása disztribúciós alakká (biz.), általánosított Cauchy-feladat értelmezése, klasszikus megoldás létezése és egyértelműsége, D'Alembert-formula, a formula következményei (véges sebességű hullámterjedés, függőségi kúp).

10. Hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok.

- klasszikus Cauchy-feladat értelmezése, klasszikus alak átírása disztribúciós alakká, klasszikus megoldás létezése és egyértelműsége bizonyos feltételek mellett.

11. Peremérték-feladatok elliptikus egyenletekre, Green-függvények.

- klasszikus peremérték-feladatok a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátorra, Gauss–Osztrogradszkij-tétel skalár és vektor alak, első Green-formula (biz.), a klasszikus harmadik peremérték-feladat megoldásának egyértelműsége (biz.), klasszikus sajátérték-feladatok és sajátértékek értelmezése, sajátértékek előjele (biz.), Green-függvény értelmezése és tulajdonságai (biz. csak a két könnyű), Green reprezentációs tétele.

12. Szoboljev-terek.

- a $H^k(\Omega)$ tér definíciója, a $H^k(\Omega)$ -beli függvények ekvivalens jellemzése (biz. az egyik irány), a $H_0^k(\Omega)$ tér, a $H^k(\Omega)$ és $H_0^k(\Omega)$ terek alaptulajdonságai, ekvivalens norma $H_0^1(\Omega)$ -ban (biz.), $H^1(\Omega)$ kompakt beágyazása $L^2(\Omega)$ -ba, a nyom operátor értelmezése, $H^1(\Omega)$ -beli függvények nyoma $\partial\Omega$ -n.

13. Peremérték-feladatok gyenge megoldása.

- az első peremérték-feladat klasszikus megoldása, a gyenge alak értelmezése, gyenge megoldás, létezés és egyértelműség (biz.).