Parciális differenciálegyenletek előadás
Matematika BSc III/2

2015/2016. tavasz

Hol tartunk?

Ennek a előadásvázlatnak a célja, hogy címszavakban összefoglalja és átláthatóbbá tegye az adott heti előadásokon elhangzott anyagot.

1. előadás (február 9.)

- **Tájékoztató a félévről.**
- **Alapfogalmak:** jelölések ($\partial_t, \partial_x, \partial_x^2, \dots$), multiindex $= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, abszolútértéke $=$ deriválás rendje, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, PDE „fogalma”, klasszikus megoldás, rend, főbb egyenlettípusok (kvázilineáris, szemilineáris, lineáris);
- **Fizikai példák:** hővezetési egyenlet egy- és többdimenzióban, hullámegyenlet egydimenzióban (húr rezgése), magasabb dimenziós hullámegyenletek. További példák: transzport- és biharmonikus egyenlet.

2. előadás (február 16.)

- **Másodrendű főrészében lineáris egyenletek osztályozása:** általános alak, főrész, előzetes feltevés ($a_{jk} = a_{kj}$), együtthatómátrix, sajátértékek előjele, elliptikus, hiperbolikus, parabolikus egyenlet, példák (hullámegyenlet, hővezetési egyenlet, Laplace-egyenlet);
- **Másodrendű lineáris egyenletek kanonikus alakja állandó együtthatós esetben:** a főrész transzformációjának ötlete (főtengelytétel, új változó bevezetése), az alacsonyabb rendű tagok transzformációjának ötletet (új függvény bevezetése exponenciális szorzó segítségével), kanonikus alak elliptikus/hiperbolikus/parabolikus esetben;
- **A $C_0^\infty(\Omega)$ függvényosztály:** jelölések ($C^k(\Omega), k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ esetbekben); tartó (support), kompakt tartójú függvények, $C_0^\infty(\Omega)$.

3. előadás (február 23.)

- **A $C_0^\infty(\Omega)$ függvényosztály:** $C_0^\infty(\Omega)$, példa, η, η_ε és tulajdonságai, egységapproximáció, az approximációs tétel (csak a folytonos eset biz.), $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű $L^p(\Omega)$-ban $1 \le p < \infty$ esetén (nem biz.), kompakt halmazon 1-gyel egyenlő kompakt tartójú sima függvény konstruálása (nem biz., csak ötlet), egységosztás tétele (nem biz.);
- **Disztribúcióelmélet:** $\mathscr{D}(\Omega)$, disztribúció definíciója (sorozatfolytonosság), példák ($f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ esetén T_f reguláris disztribúció.

4. előadás (március 1.)

- **Disztribúcióelmélet:** reguláris disztribúció egyértelműen meghatározza melyik lokálisan integrálható függvényhez tartozik (nem biz.); δ_a Dirac-delta, a folytonosság ekvivalens megfogalmazása (biz.), alkalmazás T_f folytonosságának igazolására;
- **Disztribúciók egyenlősége:** globális és lokális egyenlőség, a két fogalom ekvivalenciája (biz.), disztribúció tartója;
- **Algebrai műveletek disztribúciókkal:** összeadás, számmal szorzás, $\mathscr{D}'(\Omega)$ vektortér, sima függvénnyel szorzás, $\psi T_f = T_{\psi f}$;

- **Disztribúciók differenciálása:** motiváció ($\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$ legyen).

5. előadás (március 8.)

- **Disztribúciók differenciálása:** $T_{\partial^\alpha f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(\partial^\alpha \varphi)$ (biz.), $\partial^\alpha u$ definíciója, $\partial^\alpha u$ továbbra is disztribúció (biz.), példák ($H' = \delta_0$, szakaszonként folytonosan differenciálható függvény deriváltja), algebrai műveletek és a derivált, hogyan tovább? (cél: $Lu = f$, ehhez alapmegoldás, konvolúció, amihez direkt szorzat);

- **Disztribúciók direkt szorzata:** függvények direkt szorzata, $T_{f\times g}$ megadása, $u \times v$ definíciója, a definíció értelmessége (nem biz.).

6. előadás (március 22.)

- **Disztribúciók direkt szorzata:** a direkt szorzat tulajdonságai, u és v felcserélése (biz.), linearitás (nem. biz.), differenciálás (nem biz.), tartó (nem biz.);

- **Disztribúciók konvolúciója:** függvények konvolúciója, elégséges feltételek a konvolúció létezésére, T_{f*g} megadása, baj: $\varphi(y+z)$ nem kompakt tartójú, ötlet: csonkítás, csonkító függvények konvergenciája $\mathbb{R}^{2n}$-ben ($\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$), $T_{f*g} = \lim_{k\to\infty} T_f \times T_g\big((y,z) \mapsto \varphi(y+z)\zeta_k(y,z)\big)$, $u * v$ definíciója (mikor értelmes), a konvolúció tulajdonságai, linearitás (nem biz.), kommutativitás (nem biz.), differenciálás (nem biz.), Dirac-deltával vett konvolúció (biz.).

7. előadás (április 4.)

- **Alapmegoldások:** állandó együtthatós lineáris differenciáloperátor alakja, alapmegoldás definíciója, $Lu = F$ megoldása az alapmegoldás segítségével, egyértelműsége (biz.), példák alapmegoldásokra (közdiff., hővezetés, hullámegyenlet);

- **Hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok:** a klasszikus feladat, klasszikus megoldás, jel $\mathbb{R}^{n+1}_+$, cél: formula a megoldásra, hogyan? (először általánosított megoldás az alapmegoldás és konvolúció segítségével), a klasszikus Cauchy-feladat megoldása disztribúció értelemben eleget tesz a hullámegyenletnek $F = T_{\tilde{f}} + \delta_0' \times T_g + \delta_0 \times T_h$ jobb oldal esetén (biz.).

8. előadás (április 11.)

- **Hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok:** cél: formula a megoldásra, hogyan? (először általánosított megoldás az alapmegoldás és konvolúció segítségével), a klasszikus Cauchy-feladat megoldása disztribúció értelemben eleget tesz a hullámegyenletnek $F = T_{\tilde{f}} + \delta_0' \times T_g + \delta_0 \times T_h$ jobb oldal esetén (biz.), az általánosított Cauchy-feladat értelmezése, a klasszikus Cauchy-feldatnak egyértelmű megoldása van, d'Alembert-formula (nem biz.), mese a véges sebességű hullámterjedésről;

- **Hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok:** a klasszikus feladat értelmezése, a klasszikus megoldás disztribúció értelemben eleget tesz a hővezetési egyenletnek $F = T_{\tilde{f}} + \delta_0 \times T_g$ jobb oldallal (nem biz.), az általánosított Cauchy-feladat értelmezése, a hővezetési egyenlet alapmegoldása, baj: $E * F$ általában nem létezik csak extra korlátossági feltételekkel, a klasszikus Cauchy-feladat megoldásának létezése (nem biz.).

9. előadás (április 18.)

- **Peremérték-feladatok:** Gauss–Osztrogradszki tétel (skalár és vektoralak, nem biz.), Green első formulája (biz.), a harmadik peremérték-feladat megoldásának egyértelműsége (biz.), sajátértékek, sajátérték-feladatok.

10. előadás (április 25.)

- **Peremérték-feladatok:** klasszikus sajátértékek, klasszikus sajátérték-feladatok, a sajátértékek előjele (biz.).
- **Poisson-egyenlet alapmegoldása:** az alapmegoldás (nem biz.);
- **Green-függvények:** Green-függvény értelmezése, a Green-függvények három tulajdonsága (biz. csak a két könnyű), Green reprezentációs tétele (nem biz.);
- **Szoboljev-terek:** a $H^k(\Omega)$ tér értelmezése, a $H_0^k(\Omega)$ tér. hogyan jellemezhetők a térben a függvények?