Parciális differenciálegyenletek, Minta vizsga
2016. tavasz

Tudnivalók. A rövid kérdések egy-egy fogalomra, tételre vagy példára kérdeznek rá, itt bizonyítani nem kell semmit. Ebben a részben összesen 30 pont szerezhető. A második rész egy témakör áttekintése néhány konkrét kérdésen keresztül. Bizonyítani csak azt kell, amit az adott feladat kér. Ebben a részben 20 pont szerezhető. Egyik részben sincs minimum pontszám. A ponthatárok nem lesznek szigorúbbak, mint 30–35–40–45.

Rövid kérdések.

(A válaszokban minden jelölésről mondja meg, hogy milyen térbeli objektumot jelöl, például szám, függvény, disztribúció, multiindex stb.)

1. Írja fel az egydimenziós esetben a hővezetési és a hullámegyenletet. (2 pont)
2. Írja fel a $\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\partial_j\partial_k u(x) = f(x)$ egyenlet együtthatómátrixát és fogalmazza meg, hogy mikor parabolikus, hiperbolikus, elliptikus egy pontban az egyenlet. (4 pont)
3. Adja meg a $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergencia két feltételét. (4 pont)
4. Milyen függvényhez tartozik reguláris disztribúció és hogyan értelmezzük? (3 pont)
5. Adja meg disztribúció deriváltjának fogalmát. (2 pont)
6. Írja fel két disztribúció direkt szorzatát és adja meg, hogy a szóban forgó disztribúciók és a direkt szorzat milyen térnek eleme. (3 pont)
7. Írja fel a hullámegyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot és adja meg, hogy milyen térben keresünk megoldást. (3 pont)
8. Írja fel az első, második és harmadik peremfeltételt egy elliptikus peremérték-feladat esetében. (4 pont)
9. Írja fel a $H^k(\Omega)$ térbeli skalárszorzatot. (2 pont)
10. Fogalmazza meg sorozatok segítségével, hogy mit jelent az, hogy egy tér beágyazása egy másik térbe kompakt. Mely terekről tanultuk a kompakt beágyazást? (3 pont)

Témakör kifejtése.

(A válaszokban minden jelölésről mondja meg, hogy milyen térbeli objektumot jelöl, például szám, függvény, disztribúció, multiindex stb.)

1. Írja fel (de ne bizonyítsa be) Green első formuláját a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátorra vonatkozóan. (3 pont)
2. Tekintsük az $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f$ egyenletet harmadik peremfeltétellel. Fogalmazza meg, hogy milyen tételt tanultunk az egyértelmű megoldhatósággal kapcsolatban és bizonyítsa is be a tételt. (4+8 pont)
3. Fogalmazza meg, hogy mit értünk sajátérték-feladaton majd mondja ki, hogy a sajátértékekre vonatkozóan milyen következménye van az előbbi kérdésbeli tételnek. (5 pont)

Képletgyűjtemény.

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) f(\tau,\xi)\, d\xi\, d\tau + \\ + \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) g(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\tau\, d\xi + \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\, d\xi$$

$$\int_\Omega \mathscr{G}(x,y) f(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} \partial_y^\nu \mathscr{G}(x,y)\varphi(y)\, d\sigma_y$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{ha } t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t\le 0, x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{ha } n=2, x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\cdot\dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{ha } n\ge 3, x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}. \end{cases}$$