A 8. feladatsor megoldása
III. éves alkmat parcdiff 2016. tavasz

*1. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$-ben a $\Delta u = 0$ Laplace-egyenlet elforgatásra nézve invariáns, azaz ha Q $n \times n$-es ortogonális mátrix, akkor a $v(x) = u(Qx)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ függvényre $\Delta v = 0$.

Megoldás. A feladat beadható, ezért a megoldást nem árulom el.

2. Keressük meg a $\Delta u = 0$ egyenlet $u(x) = v(|x|)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ alakú (más szóval radiálisan szimmetrikus) megoldásait, ahol $v\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ függvény.

Megoldás. A rövidség kedvéért legyen $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, és keressük a $\Delta u = 0$ egyenlet megoldásait $u(x) = v(r)$ alakban, ahol a $v\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ függvényt szeretnénk meghatározni. Az összetett függvény deriválási szabálya alapján

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0),$$

ezért $i = 1, \ldots, n$ esetén

$$\partial_i u(x) = v'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r},$$

(ahol „$'$" az r szerinti deriválást jelöli) és így

$$\partial_i^2 u(x) = v''(r)\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{x_i}{r} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right).$$

Ebből következően

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u(x) = \sum_{i=1}^n \left[v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)\right] = v''(r)\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{r^2} + \frac{1}{r}v'(r)\left(n - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{r^2}\right) = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r).$$

Ez azt jelenti, hogy $\Delta u = 0$ pontosan akkor teljesül, ha

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0.$$

A fenti lineáris közönséges differenciálegyenlet v'-ben szétválasztható változójú, így könnyen megkaphatjuk a megoldásait. A megfelelő oldalra rendezve az egyes tagokat

$$\frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-n}{r}$$

adódik. Mindkét oldalt integrálva kapjuk, hogy $\log|v'(r)| = (1-n)\log r + c$, azaz $v'(r) = Cr^{1-n}$, ahol C tetszőleges konstans (ezzel az előbbi leosztás során „elvesztett" konstans 0 megoldást is „visszanyerjük"). Ennek megfelelően $r > 0$ esetén

$$v(r) = \begin{cases} a\log r + b, & \text{ha } n = 2, \\ \frac{a}{r^{n-2}} + b, & \text{ha } n \geq 3, \end{cases}$$

ahol a, b konstansok. Megjegyezzük, hogy $n = 2$ esetén $a = \frac{1}{2\pi}$, $b = 0$ választással, $n \geq 3$ esetén pedig $a = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}$, $b = 0$ választással (ahol $\alpha(n)$ az n-dimenziós egységgömb térfogata) nyerjük a Laplace-egyenlet alapmegoldásait, ezzel kapcsolatban lásd például az 5. feladatsor 6. feladatát. Gondoljuk meg, hogy a fentiekben azt is beláttuk, hogy radiálisan szimmetrikus függvények esetében a Δ operátor $v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r)$ alakban írható.

Megjegyezzük, hogy a Laplace-operátor először Pierre-Simon Laplace (1749–1827) francia matematikus és fizikus vezette le (méghozzá polárkoordinátás alakban) a csillagászati vizsgálódásai során. A legenda szerint Laplace tanított és vizsgáztatta is Napóleont 1873-ban az École Militaire-ben. A Δ jelölést Robert Murphy (1806–1843) angol matematikus és fizikus használta először, a Laplace-operátor elnevezést pedig James Clerk Maxwell (1831–1879) a híres 1873-es Értekezés az elektromosságról és mágnesességről című művében.

Laplace tanítványa Siméon-Denis Poisson (1781–1840) az elektromosságtani vizsgálódásai során a $\Delta u = f$ egyenletet írta le, ezt az ő tiszteletére Poisson-egyenletnek szokás nevezni.

3. Legyen a továbbiakban $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, továbbá $p \in C^1(\overline{\Omega})$, amelyre $p(x) \geq m > 0$ minden $x \in \overline{\Omega}$ esetén. Definiáljuk az $Lu := -\operatorname{div}(p\nabla u) = -\sum_{i=1}^n \partial_i(p\partial_i u)$ másodrendű differenciáloperátort. Bizonyítsuk be, hogy L egyenletesen elliptikus operátor!

Megoldás. A simasági feltételekből adódóan

$$Lu = -\sum_{i=1}^n \partial_i(p\partial_i u) = \sum_{i=1}^n (-p)\partial_i^2 u - \sum_{i=1}^n \partial_i p \partial_i u.$$

Az L operátor főtagjának $A(x)$ mátrixa diagonális, a főátló minden eleme $-p(x) \leq -m < 0$, vagyis a sajátértékek mind negatívak, tehát az operátor minden pontban elliptikus Ω-n. Ezenkívül $p \in C^1(\overline{\Omega})$ miatt létezik $M > 0$, amelyre $m \leq p(x) \leq M$ minden $x \in \overline{\Omega}$ esetén, amiből nyilvánvalóan következik, hogy $m|\xi|^2 \leq p(x)|\xi|^2 = \langle A(x)\xi, \xi\rangle = p(x)|\xi|^2 \leq M|\xi|^2$ minden $\xi \in \mathbb{R}^n$ esetén, vagyis az operátor egyenletesen elliptikus Ω-n. Megjegyezzük, hogy a negatív előjelre a következő feladat ad magyarázatot, ekkor lesz L pozitív operátor.

4. Legyen L a 3. feladatban definiált operátor.

a) Legyen $D(L) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})\colon u|_{\partial\Omega} = 0,\ Lu \in L^2(\Omega)\}$ Igazoljuk, hogy ekkor az $L\colon L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ operátor szimmetrikus, azaz $\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)}$ minden $u, v \in D(L)$ esetén, továbbá L szigorúan pozitív, azaz $\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} > 0$ minden $u \in D(L)$, $u \not\equiv 0$ esetén.

b) Legyen $D(L) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})\colon \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0,\ Lu \in L^2(\Omega)\}$ Igazoljuk, hogy ekkor az $L\colon L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ operátor szimmetrikus, azaz $\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)}$ minden $u, v \in D(L)$ esetén, továbbá L pozitív, azaz $\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} \geq 0$ minden $u \in D(L)$ esetén, és egyenlőség csak $u \equiv c \in \mathbb{R}$ esetén állhat fenn.

Megoldás. a) Használjuk a második Green-formulát, amely sima peremű tartomány és $u, v \in D(L)$, függvények esetén a következőt mondja (vigyázzunk, hogy $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$):

$$\int_\Omega (vLu - uLv) = -\int_{\partial\Omega} p(v\partial_\nu u - u\partial_\nu v)\, d\sigma.$$

Így az u és v függvényre vonatkozó homogén peremfeltétel miatt $\langle Lu, v\rangle - \langle u, Lv\rangle = 0$ minden $u, v \in D(L)$ esetén. Másrészt $v = u$ választással $u \in D(L)$ esetén az első Green-formula alapján

$$\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uLu = \int_\Omega p\,|\operatorname{grad} u|^2 - \int_{\partial\Omega} pv\partial_\nu u \geq m\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 \geq 0.$$

A fenti egyenlőtlenségláncolat jobb oldalán pontosan akkor áll egyenlőség, ha $\operatorname{grad} u = 0$, vagyis $u \equiv c \in \mathbb{R}$. A $D(L)$-ben szereplő homogén peremfeltétel miatt szükségképpen $c = 0$, azaz $u \equiv 0$. Ezzel beláttuk, hogy L szigorúan pozitív operátor $D(L)$-en.

b) Az a) részhez hasonlóan járunk el, a második Green-formulát és a normális irányú deriváltra vonatkozó homogén peremfeltételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_\Omega vLu - \int_\Omega uLv = 0.$$

Ezenkívül $u = v$, $u \not\equiv c \in \mathbb{R}$ esetén az első Green-formula alapján

$$\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uLu = \int_\Omega p|\operatorname{grad} u|^2 \geq m\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 \geq 0.$$

A fenti egyenlőtlenségláncolat jobb oldalán pontosan akkor áll egyenlőség, ha $\operatorname{grad} u = 0$, vagyis $u \equiv c \in \mathbb{R}$ (és a konstansfüggvények mind $D(L)$-ben vannak).

5. Mutassuk meg, hogy a Dirichlet-feladatnak legfeljebb egy $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$-beli megoldása lehet, a Neumann-feladat $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$-beli megoldásai pedig csak konstansban térhetnek el egymástól.

Megoldás. Ha van két $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldásunk, akkor a különbségük, amely ugyancsak $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$-ban van, kielégíti a homogén feladatot, azaz $0 = L(u_1 - u_2)$, ebből következően $\langle L(u_1 - u_2), u_1 - u_2\rangle = 0$. De az 5. feladatból tudjuk, hogy ez csak akkor lehetséges, ha Dirichlet-féle peremfeltétel esetén $u_1 - u_2 = 0$, vagy Neumann-féle peremfeltétel esetén $u_1 - u_2$ konstans. Átfogalmazva, a Dirichlet-feladatnak egyértelmű a $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ térbeli megoldása, a Neumann-feladatnak az ilyen térbeli megoldásai konstansban térnek el egymástól. Megjegyezzük, hogy a Dirichlet-feladatnak az $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ megoldása is egyértelmű, ennek bizonyítása azonban a maximumelvre kellene támaszkodnunk. A megoldás létezése sokkal nehezebb kérdés, ezt lásd előadáson.

Megemlítjük, hogy a Dirichlet-féle peremfeltétel Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) német matematikusról kapta nevét, aki először foglalkozott az ilyen típusú peremérték-feladatokkal és vette észre, hogy a feladat valójában egy energiaminimalizációs problémával ekvivalens, később ezt nevezték Dirichlet-elvnek. A Neumann-féle peremfeltétel Carl Gottfried Neumann (1832–1925) német matematikus és fizikus nevét viseli, aki elektromosságtani vizsgálódásai során foglalkozott ezzel a peremfeltétellel. A funkcionálanalízisbeli Neumann-sor is róla van elnevezve, ugyanis Neumann a peremérték-feladat megoldásait éppen ilyen sor alakjában adta meg.

6. Igazoljuk, hogy ha L a 3. feladatban definiált operátor és $D(L) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})\colon \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0,\ Lu \in L^2(\Omega)\}$, akkor $R(L) \subset \ker(L)^\perp$, azaz ha $\begin{cases} Lu = f & \Omega\text{-ban}, \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0, & \end{cases}$, akkor $\displaystyle\int_\Omega f = 0.$

Megoldás. Az első Green-formulát alkalmazva az $u \in D(L)$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ függvényekre, majd felhasználva az u-ra vonatkozó ($D(L)$-ben adott) homogén peremfeltételt, azt kapjuk, hogy

$$\int_\Omega vf = \int_\Omega vLu = \int_\Omega p\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle.$$

Válasszuk v-t az azonosan 1 függvénynek, ez benne van $C^1(\overline{\Omega})$-ban, ekkor a fenti egyenlőségből $\int_\Omega f = 0$ adódik. Jegyezzük meg, hogy a feladat állítása valójában az L operátor szimmetrikus voltán múlt. Valóban, tetszőleges $L\colon D(L) \to H$ szimmetrikus operátorra igaz, hogy $R(L) \subset \ker(L)^\perp$, hiszen minden $u \in D(L)$ és $v \in \ker(L)$ esetén $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle = 0$. Azt is megemlítjük, hogy a fenti feltétel a megoldhatóság szempontjából elegendő is, ez következik például a Fredholm-féle alternatívatételből, lásd előadáson.

7. Legyen $\Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Bizonyítsuk be, hogy a $\begin{cases} \Delta u = 1 & \Omega\text{-ban}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$ feladatnak nincs $u \in C^2(\overline{\Omega})$ megoldása.

Megoldás. Vegyük a tartomány egyik sarkát, például az origót. Az x tengelyen és az y tengelyen is a peremfeltétel miatt $u = 0$. Ekkor (mivel u a tartomány lezártján kétszer differenciálható, ezért) $\partial_x u(x,0) = \partial_y u(0,y) = 0$, így $\partial_x^2 u(0,0) = \partial_y^2 u(0,0) = 0$, azaz $\Delta u(0,0) = \partial_x^2 u(0,0) + \partial_y^2 u(0,0) = 0$. Azt kaptuk, hogy ha u teljesíti a peremfeltételt (és kétszer differenciálható a tartomány lezártján), akkor szükségképpen $\Delta u(0,0) = 0$. Vagyis u nem teljesítheti a tartomány belsejében a $\Delta u = 1$ feltételt, hiszen akkor a folytonosság miatt a sarokban is ennek kellene teljesülnie.

8. Legyen $B_1(0)$ az origó középpontú 1 sugarú nyílt körlap. Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén van az alábbi peremérték-feladatnak $u \in C^2(B_1(0)) \cap C^1(\overline{B_1(0)})$ megoldása? Adjuk meg a megoldásokat!

$$\begin{cases} \Delta u = \alpha & B_1(0)\text{-ban}, \\ \partial_\nu u|_{\partial B_1(0)} = 1. \end{cases}$$

Megoldás. Alkalmazzuk az első Green-formulát az u és a konstans 1 függvényekre. Ekkor $\operatorname{grad} 1 = 0$ miatt

$$\int_{B_1(0)} 1 \cdot \Delta u = \int_{\partial B_1(0)} 1 \cdot \partial_\nu u \, d\sigma.$$

adódik. Behelyettesítve a $\Delta u = \alpha$ és $\partial_\nu u|_{\partial B_1(0)} = 1$ összefüggéseket

$$\int_{B_1(0)} \alpha = \int_{\partial B_1(0)} 1 \, d\sigma.$$

A fenti egyenlőség bal oldalán a konstans α függvény egységkörön vett integrálja szerepel, ez nem más, mint az egységkör területének α-szorosa, vagyis $\alpha\pi$. A jobb oldalon pedig a konstans 1 függvénynek az egységkörvonalon vett integrálja áll, ez nem más, mint a körovnal hossza, vagyis 2π. A két kifejezés megegyezik, következésképpen $\alpha\pi = 2\pi$, tehát szükségképpen $\alpha = 2$. Ez azt jelenti, hogy csak $\alpha = 2$ esetén lehet $C^2(B_1(0)) \cap C^1(\overline{B_1(0)})$-beli megoldása a feladatban szereplő peremérték-feladatnak. Vegyük észre, hogy ekkor van is, hiszen az $u(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}r^2$ függvényre $\Delta u = 2$ és $\partial_\nu u|_{\partial B_1(0)} u = \partial_r u|_{r=1} = 1$. Az 5. feladat alapján tudjuk, hogy a Neumann-feladat $C^2(B_1(0)) \cap C^1(\overline{B_1(0)})$ megoldásai konstansban térnek el egymástól, így $\alpha = 2$ esetén a peremérték-feladat összes megoldása $u(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + c$ alakú, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Okoskodhattunk volna úgy is, hogy tekintjük az $v(x,y) := u(x,y) - \frac{1}{2}r^2$ függvényt. Ekkor v-re homogén Neumann-peremfeltétel teljesül, továbbá $\Delta v = \alpha - 2$. A 6. feladatból azonban tudjuk, hogy ekkor $\int_{B_1(0)} (\alpha - 2) = 0$ teljesül, vagyis szükségkéépen $\alpha - 2 = 0$, ekkor viszont $v = c$, hiszen a homogén Neumann-feladatnak a konstansfüggvények a megoldásai.

9. Legyen $B_1(0)$ az origó középpontú 1 sugarú nyílt körlap, továbbá $T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x + 2y^2 < 1\}$ (egy ellipszis belseje). Oldjuk meg az alábbi peremérték-feladatokat!

a) $\begin{cases} \Delta u = x + y & B_1(0)\text{-ban}, \\ u|_{\partial B_1(0)} = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \Delta u = x & B_1(0)\text{-ban}, \\ u|_{\partial B_1(0)} = y^2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{a } T \text{ tartományban}, \\ u|_{\partial T} = x^2. \end{cases}$

Megoldás. a) Kézenfekvő az u megoldást $u(x,y) = (x^2+y^2-1)(ax+by+c)$ alakban keresni, hiszen ekkor a peremfeltétel automatikusan teljesül. Ekkor $\Delta u(x,y) = 8ax + 8by + 4c$. A feltételekből következően $a = b = \frac{1}{8}$ és $c = 0$. Tehát a feladat megoldása $u(x,y) = \frac{x+y}{8}(x^2+y^2-1)$.

b) Kézenfekvő az u megoldást $u(x,y) = (x^2+y^2-1)(ax+by+c) + y^2$ alakban, hiszen ekkor a peremfeltétel automatikusan teljesül. Ekkor $\Delta u(x,y) = 8ax + 8by + 4c + 2$, így $a = \frac{1}{8}, b = 0, c = -\frac{1}{2}$. Tehát $u(x,y) = (x^2+y^2-1)(\frac{1}{8}x - \frac{1}{2}) + y^2$.

c) Kézenfekvő az u megoldást $u(x,y) = (x^2+x+2y^2-1)c + x^2$ alakban keresni. Ekkor $\Delta u(x,y) = 6c + 2$, így $c = -\frac{1}{6}$, tehát $u(x,y) = -\frac{1}{6}(x^2+x+2y^2-1) + x^2$.

Jegyezzük meg, hogy az előbbi módszer segítségével polinom jobb oldallal, illetve polinom kezdeti függvénnyel adott Dirichlet-feladat klasszikus megoldását meg tudjuk keresni. Valóban, az 1. feladatsor 5. feladatának megoldásában megmutattuk, hogy a Laplace-operátor az n-edfokú kétváltozós polinomok terét szürjektíven képezi le az $(n-2)$-edfokú kétváltozós polinomok terére. A megoldás egyértelműségét pedig ennek a feladatsornak az 5. feladatában igazoltuk.