

1. Tegyük fel, hogy $g \in C(\mathbb{R}^n)$ korlátos, és legyen ekkor $u(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta) d\eta$.

a) Bizonyítsuk be, hogy $u(0, x) = g(x)$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén.

b) Tegyük fel, hogy $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$, amelyre $g, \partial_j g, \partial_j^2 g$ ($j = 1, \dots, n$) korlátosak. Mutassuk meg, hogy ekkor $\partial_t u - \Delta u = 0$ $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ -ben.

2. Oldjuk meg az alábbi parabolikus Cauchy-feladatokat!

a)
$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = \cos x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

3. Legyen $n = 1, f = 0$, és tekintsük a parabolikus Cauchy-feladatot.

a) Tegyük fel, hogy $g \in C(\mathbb{R})$ korlátos. Igazoljuk, hogy ha $g(x) \geq 0$ ($x \in \mathbb{R}$), akkor a Cauchy-feladat u megoldására $u(x) \geq 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

b) Tegyük fel, hogy $g \in C^2(\mathbb{R})$ és g, g', g'' korlátos. Igazoljuk, hogy ha g konvex, akkor minden $t > 0$ esetén a Cauchy-feladat u megoldására $u(t, \cdot)$ is konvex.

4. Bizonyítsuk be, hogy a parabolikus Cauchy-feladat u megoldása folytonosan függ g -től a következő értelemben: ha $g_1, g_2 \in C(\mathbb{R}^n)$ korlátosak, amelyekre $|g_1(x) - g_2(x)| \leq \varepsilon$ ($x \in \mathbb{R}^n$), akkor a parabolikus Cauchy-feladat megfelelő u_1, u_2 megoldásaira $|u_1(t, x) - u_2(t, x)| \leq \varepsilon$ ($(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$).

5. Legyen $n = 1, f = 0, g \in C(\mathbb{R})$, és tegyük fel, hogy $\text{supp } g \subset [a, b]$, valamint $g|_{[a, b]} > 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a parabolikus Cauchy-feladat u megoldására $u(t, x) > 0$ minden $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ esetén! (Végtelen sebességű hőterjedés)

*6. Legyen $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $\partial_1 g$ folytonos \mathbb{R}^2 -en. Értelmezzük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $f(x) = \int_a^x g(x, y) dy$, ahol $a \in \mathbb{R}$ rögzített. Mutassuk meg, hogy $f'(x) = g(x, x) + \int_a^x \partial_1 g(x, y) dy$.

7. Tekintsük a

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\text{-ben,} \\ v(0, x) = f(\tau, x) & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

feladatcsaládot, ahol $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ paraméter. Tegyük fel, hogy minden $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ esetén a feladat $v(\cdot, \cdot; \tau)$ megoldására $v, \partial_t v, \Delta v \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+)$. Értelmezzük ekkor az u függvényt a következőképpen:

$$u(t, x) = \int_0^t v(t - \tau, x; \tau) d\tau.$$

Bizonyítsuk be, hogy $\partial_t u - \Delta u = f$ $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ -ben és $u(0, x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$), azaz u megoldása a második részfeladatnak. (Duhamel-elv)

8. Oldjuk meg a következő parabolikus Cauchy-feladatokat!

a)
$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = x + t & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = e^x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \partial_t u - 4\partial_x^2 u + u = e^x & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = x^2 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$