Az 5. feladatsor megoldása
III. éves alkmat parcdiff 2016. tavasz

1. Bizonyítsuk be, hogy a $\partial_t u - \Delta u = 0$ hővezetési egyenlet dilatációra nézve invariáns, pontosabban, ha $v(t,x) = u(\lambda^2 t, \lambda x)$ ($t > 0, x \in \mathbb{R}^n$), ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $\partial_t v - \Delta v = 0$.

Megoldás. Az összetett függvény deriválási szabálya alapján $\partial_t v(t,x) = \lambda^2 \partial_t u(\lambda^2 t, \lambda x)$, $\partial_i v(x) = \lambda \partial_i u(\lambda^2 t, \lambda x)$, $\partial_i^2 v(x) = \lambda^2 \partial_i^2 u(\lambda^2 t, \lambda x)$, így

$$\Delta v(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 v(x) = \lambda^2 \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u(\lambda^2 t, \lambda x) = \lambda^2 \Delta u(\lambda^2 t, \lambda x).$$

Ennek alapján

$$\partial_t v(x) - \Delta v(x) = \lambda^2 \partial_t u(\lambda^2 t, \lambda x) - \lambda^2 \Delta u(\lambda^2 t, \lambda x) = 0.$$

2. Keressünk az n-dimenziós hővezetési egyenletnek $u(t,x) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{|x|^2}{t}\right)$ ($t > 0, x \in \mathbb{R}^n$) alakú megoldásait, ahol $v \in C^2(\mathbb{R}_0^+)$ és $\alpha \in \mathbb{R}$.

Megoldás. A $v = 0$ függvény nyilván megoldás, keressünk ettől különbözőt! A rövidség kedvéért használjuk a $z = \frac{|x|^2}{t}$ ($t > 0, x \in \mathbb{R}^n$) jelölést. Az szorzat és az összetett függvény deriválási szabálya alapján

$$\partial_t u(t,x) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} v(z) - \frac{|x|^2}{t^{\alpha+2}} v'(z) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} v(z) - \frac{z}{t^{\alpha+1}} v'(z),$$

továbbá $\partial_{x_j} u(t,x) = \frac{2x_j}{t^{\alpha+1}} v'(z)$, így

$$\partial_{x_j}^2 u(t,x) = \frac{2}{t^{\alpha+1}} v'(z) + \frac{4x_j^2}{t^{\alpha+2}} v''(z) = \frac{2}{t^{\alpha+1}} v'(z) + \frac{4x_j^2}{t^{\alpha+1}} v''(z).$$

Ez azt jelenti, hogy az u függvény pontosan akkor megoldása a $\partial_t u - \Delta u = 0$ hővezetési egyenletnek, ha

$$0 = \partial_t u - \Delta u = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} v(z) - \frac{z}{t^{\alpha+1}} v'(z) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{2}{t^{\alpha+1}} v'(z) + \frac{4x_j^2}{t^{\alpha+1}} v''(z) \right) = -t^{-\alpha-1}(4zv''(z) - (z+2n)v'(z) - \alpha v(z)).$$

Következésképpen

$$4zv''(z) + (z+2n)v'(z) + \alpha v(z) = 0.$$

Vegyük észre, hogy

$$0 = 4zv''(z) + (z+2n)v'(z) + \alpha v(z) = 4z\left(v''(z) + \frac{1}{4}v'(z)\right) + 2n\left(v'(z) + \frac{\alpha}{2n}v(z)\right),$$

így célszerű az $\alpha = \frac{n}{2}$ választás, hiszen ekkor a differenciálegyenlet a $w(z) = v'(z) + \frac{1}{4}v(z)$ függvény bevezetésével a következő alakra egyszerűsödik:

$$4zw'(z) + 2nw(z) = 0.$$

Ez egy szétválasztható változójú egyenlet, akár meg is oldhatnánk, azonban gondoljuk meg, hogy $v \in C^2(\mathbb{R}_0^+)$, azaz $w \in C^1(\mathbb{R}_0^+)$ megoldást szeretnénk, ezért az egyenletből következően $w(0) = 0$, és az egyértelmű megoldhatóság folytán egyetlen ilyen megoldás van, mégpedig $w(z) = 0$. Ekkor $v'(z) + \frac{1}{4}v(z) = 0$, vagyis $v(z) = Ce^{-\frac{1}{4}z}$. Végeredményben tehát $u(t,x) = \frac{C}{(\sqrt{t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Ebből a $C = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^n$ választással éppen az n-dimenziós hővezetési egyenlet alapmegoldását nyerjük. A C konstans előbbi módon történő megválasztásának okát lásd a 4. feladat b) részében.

Megjegyezzük, hogy a fenti speciális alakú megoldás keresésére éppen az 1. feladat adja az ötletet, azonban erre az alakra dimenzióanalízisbeli megfontolások segítségével is rájöhetünk. A hővezetési egyenlet egyébként először Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) francia matematikus és fizikus írta fel 1822-ben A hővezetés analitikus elmélete címmel kiadott munkájában, amelyben az egyenletet, és a hozzá tartozó kezdetiperemérték-feladatot a később róla elnevezett Fourier-sorok (tehát trigonometrikus sorok) segítségével vizsgálta. A mű a fizika fejlődésében egy óriási mérföldkő volt, Lord Kelvin például 16 éves korában két hét alatt áttanulmányozta, és egész későbbi pályafutásaát meghatározta. Ahogy ő fogalmazott a mű egy „nagyszerű matematikai költemény”. Hasonlóan vélekedett a kiváló fizikus Arnold Sommerfeld, aki a fizikusaok bibliájának nevezte a művet.

Fourier fizikai kutatásai mellett a francia Isère megye prefektusaként tevékenykedett, és ezalatt készítette el egyiptológiai témájú áttekintő monográfiáját is. Témavezetője Lagrange volt. Doktori tanítványai közé tartozott többek között Dirichlet. Az üvegházhatás felfedezése is Fourier nevéhez köthető.

3. Mutassuk meg, hogy $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2}\, d\eta = (\sqrt{\pi})^n$.

Megoldás. Használjuk fel, hogy $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$, ekkor

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2}\,d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta_1^2-\dots-\eta_n^2}\,d\eta_1\dots d\eta_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta_1^2}\,d\eta_1\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta_n^2}\,d\eta_n = (\sqrt{\pi}\,)^n.$$

4. Legyen $E\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, amelyre

$$E(t,x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \text{ ha } & t>0, x\in\mathbb{R}^n,\\ 0, & \text{ha } t\le 0, x\in\mathbb{R}^n.\end{cases}$$

a) Bizonyítsuk be, hogy ha $x \neq 0$, akkor $\lim_{t\to 0+} E(t,x) = 0$, viszont $\lim_{t\to 0+} E(t,0) = +\infty$.

b) Igazoljuk, hogy minden $t>0$ esetén $\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)\,dx = 1$.

c) Mutassuk meg, hogy $E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$.

d) Igazoljuk, hogy $\partial_t E(t,x) - \Delta E(t,x) = 0$, ha $t>0$ és $x\in\mathbb{R}^n$.

e) Bizonyítsuk be, hogy $\partial_t E - \Delta E = \delta_0$ disztribúció értelemben $\mathbb{R}^{n+1}$-en.

Megoldás. a) Legyen $s := \frac{1}{t}$, ekkor

$$\lim_{t\to 0+} E(t,x) = \lim_{s\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right)^n e^{-s\frac{|x|^2}{4}} = 0,$$

hiszen az exponenciális tényező „legyőzi” a polinomiális tényezőt. Ha $x=0$, akkor $E(t,0) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \to +\infty$ valahányszor $t\to 0+$.

b) Legyen $t>0$ rögzített, és alkalmazzuk a $\xi = \frac{x}{2\sqrt{t}}$ helyettesítést! Ekkor a transzformáció Jacobi-determinánsának abszolútértéke $\left(2\sqrt{t}\,\right)^n$, így

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-|\xi|^2}\left(2\sqrt{t}\right)^n d\xi = \frac{1}{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} d\xi = 1.$$

c) Legyen $K\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ kompakt halmaz. Ekkor létezik $T>0$, amelyre $K\subset[-T,T]\times\mathbb{R}^n$. Így a b) rész felhasználásával

$$\int_K |E| = \int_K E \le \int_{-T}^{T}\left(\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)dx\right)dt = 2T < \infty.$$

d) Egyszerű számolással adódik, hogy

$$\partial_t E(t,x) = -\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\left(\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right) \quad \text{és} \quad \partial^2_{x_i} E(t,x) = -\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\left(\frac{1}{2t} + \frac{x_i^2}{4t^2}\right),$$

így

$$\Delta E(t,x) = \sum_{i=1}^n \partial^2_{x_i} E(t,x) = -\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\left(\frac{n}{2t} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{4t^2}\right),$$

amiből a feladat állítása nyilvánvalóan következik.

e) Be kell látnunk, hogy minden $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ esetén

$$-T_E(\partial_t\varphi) - T_E(\Delta\varphi) = \delta_0(\varphi). \tag{1}$$

Tegyük fel, hogy $\operatorname{supp}\varphi\subset[-T,T]\times B_R(0)$, ahol $B_R(0)$ az origó középpontú (nyílt vagy zárt) R sugarú gömb. A továbbiakban az (1) egyenlőség bal oldalának (-1)-szeresét alakítjuk át úgy, hogy végül a jobb oldal (-1)-szeresét kapjuk. Először vegyük észre, hogy φ kompakt tartója és E definíciója miatt

$$T_E(\partial_t\varphi) + T_E(\Delta\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(E\partial_t\varphi + E\Delta\varphi)\,dx\,dt = \int_0^T\int_{B_R(0)}(E\partial_t\varphi + E\Delta\varphi)\,dx\,dt = \tag{2}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^T\int_{B_R(0)}(E\partial_t\varphi + E\Delta\varphi)\,dx\,dt.$$

Vizsgáljuk meg egyenként az előbbi egyenlőség jobb oldalán szereplő tagokat! Az első tagban az integrálás sorrendjét felcserélve, majd parciálisan integrálva és felhasználva, hogy φ kompakt tartójú, kapjuk, hogy

$$\int_\varepsilon^T \int_{B_R(0)} E\partial_t\varphi \, dx \, dt = \int_{B_R(0)} \int_\varepsilon^T E\partial_t\varphi \, dt \, dx = \int_{B_R(0)} \left[[E\varphi]_{t=\varepsilon}^T - \int_\varepsilon^T \partial_t E\varphi \, dt \right] dx =$$
$$= \int_{B_R(0)} \left(-E(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x) - \int_\varepsilon^T \partial_t E\varphi \, dt \right) dx.$$

Most (2) második tagját vegyük szemügyre, a 2. Green-formulát alkalmazva

$$\int_\varepsilon^T \int_{B_R(0)} E\Delta\varphi \, dx \, dt = \int_\varepsilon^T \left[\int_{B_R(0)} \Delta E \, \varphi \, dx + \int_{\partial B_R(0)} (E\partial_\nu\varphi - \partial_\nu E \, \varphi) \, d\sigma \right] dt = \int_\varepsilon^T \int_{B_R(0)} \Delta E\varphi \, dx \, dt$$

adódik, ahol felhasználtuk, hogy a peremintegrál nullával egyenlő, hiszen $\operatorname{supp}\varphi \subset [-T,T] \times B_R(0)$. (Emlékeztetünk rá, hogy Green második tétele szerint $u,v \in C^2(\overline{\Omega})$ függvényekre a következő integrálátalakítás érvényes: $\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial\Omega} (u\partial_\nu v - v\partial_\nu u) \, d\sigma$. Valójában gömb helyett kockát véve, a Green-tétel helyett egyszerűen kétszeres parciális integrálásról van szó, amelyben a peremtagok eltűnnek.) Az előbbi két átalakítást figyelembe véve kapjuk, hogy

$$(3) \quad T_E(\partial_t\varphi) + T_E(\Delta\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(-\int_{B_R(0)} E(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x) \, dx - \int_\varepsilon^T \int_{B_R(0)} (\partial_t E - \Delta E)\varphi \, dx \, dt \right) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(-\varphi(\varepsilon,0) \int_{\mathbb{R}^n} E(\varepsilon,x) \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(\varepsilon,x) - \varphi(\varepsilon,0)) E(\varepsilon,x) \, dx \right),$$

ahol felhasználtuk, hogy φ tartója része a $[-T,T] \times B_R(0)$ halmaznak, ezért az integrálási tartományokban $B_R(0)$ helyett $\mathbb{R}^n$ is írható, továbbá E kielégíti a $\partial_t E(t,x) - \Delta E(t,x) = 0$ differenciálegyenletet, ha $t > 0$ és $x \in \mathbb{R}^n$. Vegyük észre, hogy $\varepsilon \to 0$ esetén $\varphi(\varepsilon,0) \to \varphi(0,0)$, továbbá a c) rész alapján $\int_{\mathbb{R}^n} E(x,\varepsilon) \, dx = 1$. Ezenkívül a (3) egyenlőség második integrálja a Lagrange-becslés segítségével a következő módon becsülhető:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(\varepsilon,x) - \varphi(\varepsilon,0)) E(\varepsilon,x) \, dx \right| \le \int_{\mathbb{R}^n} |x| \cdot \max_{\mathbb{R}^n} |\varphi'| \cdot E(\varepsilon,x) \, dx \le \text{const} \int_{\mathbb{R}^n} |x| E(\varepsilon,x) \, dx =$$
$$= \text{const} \cdot \frac{1}{2(\sqrt{\pi\varepsilon})^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x| e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} \, dx = \text{const} \cdot \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta| e^{-|\eta|^2} d\eta,$$

ahol az utolsó lépésben az $\eta = \frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}$ helyettesítést hajtottuk végre. Világos, hogy a fenti egyenlőség jobb oldala $\text{const} \cdot \sqrt{\varepsilon}$ nagyságrendű, így $\varepsilon \to 0$ esetén 0-hoz tart. Mindezek alapján

$$T_E(\partial_t\varphi) + T_E(\Delta\varphi) = -\varphi(0,0) = -\delta_0(\varphi),$$

és éppen ezt akartuk belátni.

5. Legyenek $a > 0$ és $b \in \mathbb{R}$ konstansok. Igazoljuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} \cos by \, dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Megoldás. Először is gondoljuk meg, hogy minden $a > 0$ és $b \in \mathbb{R}$ esetén létezik (és véges) a fenti integrál. Valóban, mivel $|\cos by| \le 1$, ezért az integrandusnak létezik integrálható majoránsa (nevezetesen e^{-ay^2}). Vegyük észre azt is, hogy a speciális $b = 0$ esetben az integrál értékét könnyen meghatározhatjuk, hiszen (a 4. feladatban igazolt összefüggés alapján)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Az integrál kiszámításához képzeljük a fenti integrált $a \in \mathbb{R}^+$ és $b \in \mathbb{R}$ függvényeként, és definiáljuk az alábbi $I\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} \cos by \, dy.$$

Deriváljuk I-t a második változója szerint! A paraméteres integrálok deriválásáról szóló tételt szerint, ha az integrandus második változó szerinti deriváltjának létezik a paramétertől független integrálható majoránsa, akkor az integrál deriválását úgy végezhetjük el, hogy az integrandust deriváljuk. Egyszerű számolással kapjuk, hogy $\partial_b e^{-ay^2}\cos by = -ye^{-ay^2}\sin by$. Szűkítsük le az I függvény értelmezési tartományát az $[a_0,+\infty)\times\mathbb{R}$ halmazra, ahol $a_0 >$ rögzített. Ekkor nyilván $a > a_0$ esetén $\left|-ye^{-ay^2}\sin by\right| \leq |y|e^{-a_0y^2}$, amelynek improprius integrálja konvergens (még a pontos értékét is meg tudjuk határozni, hiszen meg lehet adni konkrét primitív függvényt), tehát a paraméteres integrál deriválására vonatkozó tétel alkalmazható. Ebből következően

$$\partial_b I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ye^{-ay^2}\sin by\,dy = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} -2aye^{-ay^2}\sin by\,dy =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\left[e^{-ay^2}\sin by\right]_{y=-\infty}^{+\infty} - b\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2}\cos by\,dy\right) = -\frac{b}{2a}I(a,b).$$

Ez azt jelenti, hogy az I függvény az alábbi kezdetiérték-feladatot elégíti ki:

$$\frac{\partial_b I(a,b)}{I(a,b)} = -\frac{b}{2a}, \quad I(a,0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

A közönséges differenciálegyenlet mindkét oldalát (b szerint) integrálva kapjuk, hogy $\log I(a,b) = -\frac{b^2}{4a} + c(a)$, azaz $I = C(a)e^{-\frac{b^2}{4a}}$, ahol $C(a)$ egy a-tól függő konstans. A $b = 0$ helyettesítéssel, az $I(a,0)$ kezdeti értéket felhasználva

$$I(a,b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

adódik. Jegyezzük meg, hogy a fenti gondolatmenet minden $a > a_0 > 0$ esetén, vagyis tetszőleges $a > 0$ esetén érvényes, ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyezzük, hogy a feladatot megoldhattuk volna az alábbi egyszerű észrevétellel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2}\cos by\,dy = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2}e^{\mathrm{i}by}\,dy = e^{-\frac{b^2}{4a}}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(y-\mathrm{i}\frac{b}{2}\right)^2}\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}},$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2}\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, hiszen minden $z \in \mathbb{R}$ valóban igaz, így az unicitástételből következően minden komplex z esetén is igaznak kell lennie.

*6. Legyen $E\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$E(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{ha } n = 2, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ ,\dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\cdot\dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{ha } n \geq 3, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \end{cases}$$

ahol ω_n jelöli az egység sugarú n-dimenziós gömb felszínét.

a) Mutassuk meg, hogy $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

b) Igazoljuk, hogy $\Delta E(x) = 0$, ha $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

c) Bizonyítsuk be, hogy $-\Delta E = \delta_0$ disztribúció értelemben $\mathbb{R}^n$-en.

Megoldás. A feladat beadható, ezért a megoldást nem árulom el.