

5. feladatsor  
III. éves alkmat parcdiff 2016. tavasz

1. Bizonyítsuk be, hogy a  $\partial_t u - \Delta u = 0$  hővezetési egyenlet dilatációra nézve invariáns, pontosabban, ha  $v(t, x) = u(\lambda^2 t, \lambda x)$  ( $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ ), ahol  $\lambda \in \mathbb{R}$  tetszőleges, akkor  $\partial_t v - \Delta v = 0$ .
2. Keressünk az  $n$ -dimenziós hővezetési egyenletnek  $u(t, x) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{|x|^2}{t}\right)$  ( $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ ) alakú megoldásait, ahol  $v \in C^2(\mathbb{R}_0^+)$  és  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

3. Igazoljuk, hogy  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} d\eta = (\sqrt{\pi})^n$ .

4. Legyen  $E: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , amelyre

$$E(t, x) := \begin{cases} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{ha } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

a) Bizonyítsuk be, hogy ha  $x \neq 0$ , akkor  $\lim_{t \rightarrow 0^+} E(t, x) = 0$ , viszont  $\lim_{t \rightarrow 0^+} E(t, 0) = +\infty$ .

b) Igazoljuk, hogy minden  $t > 0$  esetén  $\int_{\mathbb{R}^n} E(t, x) dx = 1$ .

c) Mutassuk meg, hogy  $E \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ .

d) Igazoljuk, hogy  $\partial_t E(t, x) - \Delta E(t, x) = 0$ , ha  $t > 0$  és  $x \in \mathbb{R}^n$ .

e) Bizonyítsuk be, hogy  $\partial_t E - \Delta E = \delta_0$  disztribúció értelemben  $\mathbb{R}^{n+1}$ -en.

5. Legyenek  $a > 0$  és  $b \in \mathbb{R}$  konstansok. Igazoljuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} \cos by dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

\*6. Legyen  $E: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$E(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{ha } n = 2, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{ha } n \geq 3, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \end{cases}$$

ahol  $\omega_n$  jelöli az egység sugarú  $n$ -dimenziós gömb felszínét.

a) Mutassuk meg, hogy  $E \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ .

b) Igazoljuk, hogy  $\Delta E(x) = 0$ , ha  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

c) Bizonyítsuk be, hogy  $-\Delta E = \delta_0$  disztribúció értelemben  $\mathbb{R}^n$ -en.