

4. feladatsor
III. éves alkmát parcdiff 2016. tavasz

1. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ adott.
 - a) Legyen $\varphi_j(x) := \frac{1}{j}\varphi(x)$ ($x \in \Omega, j \in \mathbb{N}^+$). Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\varphi_j \rightarrow 0$ $\mathcal{D}(\Omega)$ -ban!
 - b) Legyen $\Omega = \mathbb{R}^n$, továbbá $\varphi_j(x) := \frac{1}{j}\varphi(\frac{x}{j})$ ($x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}^+$). Konvergencia-e a (φ_j) sorozat $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -ben?
 - c) Legyen $\Omega = \mathbb{R}^n$, továbbá $\varphi_j(x) := \frac{1}{j}\varphi(jx)$ ($x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}^+$). Konvergencia-e a (φ_j) sorozat $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -ben?
2. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ függvény.
 - a) Értelmezzük a $T_f: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen: $T_f(\varphi) := \int_{\Omega} f\varphi$. Igazoljuk, hogy T_f nulladrendű disztribúció! (T_f az f függvényhez tartozó reguláris disztribúció.)
 - b) Legyen $u: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, amelyre $u(\varphi) = \int_{\Omega} f\partial^{\beta}\varphi$, ahol β adott multiindex. Bizonyítsuk be, hogy $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ és véges rendű! Meghatározza-e (m.m.) egyértelműen u az f függvényt?
3. Adott $a \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen $\delta_a: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, amelyre $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$.
 - a) Bizonyítsuk be, hogy δ_a nulladrendű disztribúció! (δ_a az a ponthoz tartozó Dirac-delta disztribúció)
 - b) Bizonyítsuk be, hogy δ_a nem reguláris disztribúció, azaz nem létezik $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ függvény, amelyre $\delta_a = T_f$.
4. Legyen $\Omega = (0, 2)$, és értelmezzük az $u: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionált a következő módon:

$$u(\varphi) := \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{(j)}\left(\frac{1}{j}\right).$$

Igazoljuk, hogy $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$! *Véges rendű-e u ?

5. Legyen $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges. Mutassuk meg, hogy $|\alpha| \leq m$ esetén minden $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ -re $T_{\partial^{\alpha}f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T_f(\partial^{\alpha}\varphi)$!
6. Legyen $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ és α multiindex. Definiáljuk u deriváltját $\partial^{\alpha}u(\varphi) := (-1)^{|\alpha|}u(\partial^{\alpha}\varphi)$ módon. Bizonyítsuk be, hogy $\partial^{\alpha}u$ disztribúció!
7. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$. Hogyan hat egy $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ függvényre $\partial^{\alpha}\delta_a$?
8. Vezessük be a következő $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket: $\text{abs}(x) := |x|$, $\text{sgn}(x) := \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$ és $H(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$ (az úgynevezett Heaviside-függvény). Bizonyítsuk be, hogy
 - a) $T'_{\text{abs}} = T_{\text{sgn}}$
 - b) $T'_{\text{sgn}} = 2\delta_0$
 - c) $T'_H = \delta_0$.
9. Van-e olyan $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció, amelyre $u' = \delta_{-1} + \delta_1$?
10. Bizonyítsuk be, hogy az $u(x) = H(x) \sin x$ függvény disztribúció értelemben megoldása az $u'' + u = \delta_0$ differenciálegyenletnek (\mathbb{R} -en).
11. Legyen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, amelyre $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } xy \geq 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$ Adjuk meg a $\partial_{12}T_f$ disztribúciót egyszerűbb alakban!
12. Az n -dimenziós $\tilde{H}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Heaviside-függvényt a következőképpen értelmezzük:

$$\tilde{H}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_i \geq 0 \text{ minden } i = 1, \dots, n\text{-re,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

- a) Bizonyítsuk be, hogy $\partial_1\partial_2 \cdots \partial_n \tilde{H} = \delta_0$!
- b) Mutassuk meg, hogy $\partial_1\partial_2 \cdots \partial_n r = \tilde{H}$, ahol

$$r(x) = \begin{cases} x_1x_2 \cdots x_n, & \text{ha } x_i \geq 0 \text{ minden } i = 1, \dots, n\text{-re,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

13. Legyen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén $u(\varphi) := \int_0^{+\infty} \varphi(0, y)dy$. Igazoljuk, hogy
 - a) $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$,
 - b) $\partial_2 u = \delta_{(0,0)}$,
 - c) van olyan $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, amelyre $u = \partial_1 T_f$.

*14. Az $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ disztribúcióra $u' = 0$. Következik-e ebből, hogy $u = c$ valamilyen $c \in \mathbb{R}$ konstanssal?