A 3. feladatsor megoldása
III. éves alkmat parcdiff 2016. tavasz

1. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi másodrendű differenciáloperátorok (hol) milyen típusúak.

a) $Lu = \partial_x^2 u + 6\partial_{xy} u + \partial_y^2 u$

b) $Lu = 6\partial_x^2 u + 8\partial_{xy} u + 8\partial_y^2 u + 2\partial_{xz} u + 6\partial_{yz} u + 10\partial_z^2 u$

c) $Lu = (x+y)\partial_x^2 u + 2\sqrt{xy}\partial_{xy} u + (x+y)\partial_y^2 u$

Megoldás. a) Az operátor együtthatómátrixa (minden pontban) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, amelynek determinánsa -8, ezért a mátrix indefinit, így az operátor (minden pontban) hiperbolikus.

b) Az operátor együtthatómátrixa (minden pontban) $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, amelynek bal felső sarok-aldeterminánsai pozitívak (rendre 6, 32, 182), így az operátor (minden pontban) elliptikus. Megjegyezzük, hogy a Gersgorin-körök segítségével a detemináns kiszámÍtása nélkül is látható, hogy a mátrix minden sajátértéke pozitív.

c) Az operátor csak $xy \geq 0$ esetén értelmes. Az együtthatómátrixa $A(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & \sqrt{xy} \\ \sqrt{xy} & x+y \end{pmatrix}$, melynek determinánsa $x^2 + xy + y^2$. Ez 0, ha $x = y = 0$, különben a determináns $y^2 \left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1 \right]$. Ez egy másodfokú polinom $\frac{x}{y}$-ban, amelynek diszkriminánsa negatív, vagyis a polinom mindig pozitív. Ez azt jelenti, hogy a $(0,0)$ pont kivételével az egész értelmezési tartományán (azaz $xy \geq 0$ esetén, azaz az első és a harmadik síknegyedben) elliptikus a differenciáloperátor.

2. Mutassunk olyan differenciáloperátort (folytonos együtthatófüggvényekkel), amely $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$-on elliptikus, $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$-on és $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$-on hiperbolikus. Igaz-e, hogy egy ilyen differenciáloperátor $\{0\} \times \mathbb{R}^+$-on parabolikus?

Megoldás. Megmutatjuk, hogy az $Lu = x\partial_x^2 u + y\partial_y^2 u$ operátor megfelel a feladat első részében kirótt feltételeknek. Az operátor együtthatómátrixa $A(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, amelyről világos, hogy $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ estén pozitív definit, $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$ és $(x,y) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$ esetén pedig indefinit, így a kívánt tulajdonságú az operátor. Ha az együtthatómátrix nem folytonos, akkor könnyen tudunk ellenpéldát konstruálni, például az előbbi A mátrixot (és ezzel az L operátort) $(x,y) = (0,0)$ esetén úgy definiáljuk, hogy a determinánsa ne legyen 0, például $(Lu)(0,0) = \partial_x^2 u(0,0) + \partial_y^2 u(0,0)$ megfelel.

3. Mutassunk olyan differenciáloperátort (folytonos együtthatófüggvényekkel), amely $\mathbb{R}^n$ minden pontjában elliptikus, de nem egyenletesen elliptikus $\mathbb{R}^n$-en.

Megoldás. Az operátort az együtthatómátrixszával fogjuk megadni, legyen ez $A(x)$. Válasszuk $A(x)$-et diagonálisnak, a főátlóban álló összes elem legyen e^{-x_1}. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}^n$ és $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vektorra $\langle A(x)p, p \rangle = e^{-nx_1}|p|^2 > 0$, tehát $\mathbb{R}^n$ minden pontjában elliptikus az operátor. Viszont $e^{-nx_1}|p|^2 \to 0$, ha $x_1 \to +\infty$, ami azt jelenti, hogy nem egyenletesen elliptikus az operátor.

4. Lehet-e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartományon folytonos együtthatófüggvényekkel olyan differenciáloperátort megadni, amely az Ω tartomány minden pontjában elliptikus, de nem egyenletesen elliptikus Ω-n. Mi a helyzet akkor, ha az együtthatófüggvények $\overline{\Omega}$-on folytonosak, és az operátor $\overline{\Omega}$ minden pontjában elliptikus?

Megoldás. Az első kérdésre a válasz igen. Legyen $\Omega = (0,1)^n$, az $A(x)$ együtthatómátrix pedig legyen diagonális, amelyben az i-edik diagonális elem x_i. Ekkor nyilván Ω minden pontjában elliptikus az operátor, de nem egyenletesen elliptikus Ω-n, hiszen $\langle A(x)p, p \rangle = x_1 \cdots x_n > 0$ az Ω tartomány minden pontjában, azonban $x_1 \cdots x_n \to 0$, ha $x_i \to 0$ minden i-re. Ha az operátor együtthatói a tartomány lezártján folytonosak, akkor viszont a pontonkénti ellipticitásból következik az egyenletes ellipticitás. Tegyük fel ugyanis, hogy az $A(x)$ mátrixszal adott differenciáloperátor együtthatófüggvényei folytonosak a tartomány lezártján. Ekkor az $(x,p) \mapsto \langle A(x)p, p \rangle$ függvény folytonos az $\overline{\Omega} \times S$ halmazon (ahol S jelöli az origó sugarú n dimenziós egységgömb felületét). Ráadásul az ellipticitás miatt szigorúan pozitív is a függvény, így a folytonosság és az $\overline{\Omega} \times S$ halmaz kompaktsága miatt létezik $c_0 > 0$ úgy, hogy $\langle A(x)p, p \rangle \geq c_0$ minden $(x,p) \in \overline{\Omega} \times S$ pár esetén. Most legyen $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tetszőleges, ekkor $\frac{p}{|p|} \in S$, így $\langle A(x)p, p \rangle = |p|^2 \left\langle A(x)\frac{p}{|p|}, \frac{p}{|p|} \right\rangle \geq c_0 |p|^2$. Az operátor tehát szükségképpen egyenletesen elliptikus Ω-n.

5. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{xy} u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor a felső nyílt félsíkban elliptikus, az alsó nyílt félsíkban pedig hiperbolikus legyen.

Megoldás. Legyen például $a(x,y) = y^2$, $b(x,y) = 2xy$ és $c(x,y) = x^2 + y$. Ekkor az L operátor együtthatómátrixa

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 + y \end{pmatrix}.$$

A mátrix bal felső eleme a nyílt felső és alsó félsíkban mindig pozitív, másrészt $\det A(x,y) = y^3$, amely $y > 0$ esetén pozitív, $y < 0$ esetén negatív, tehát a mátrix a felső nyílt félsíkban elliptikus (sőt mindkét sajátértéke pozitív), az alsó nyílt félsíkban hiperbolikus. Egy másik példa:

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 1+y & y \\ y & y \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det A(x,y) = y$, ezért A elliptikus a felső nyílt félsíkban és hiperbolikus az alsó nyílt félsíkban.

6. Adjunk meg a, b nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + x^2\partial_{xy}u + y^2\partial_{yx}u + b(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor elliptikus a $B(0,1)$ körlap belsejében és az $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(0,2)}$ végtelen körgyűrű belsejében, továbbá hiperbolikus a $B(0,2) \setminus \overline{B(0,1)}$ körgyűrű belsejében (ahol $B(0,R)$ jelöli az origó középpontú R sugarú nyílt körlapot a síkon).

Megoldás. Az L operátor együtthatómátrixa

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) & \frac{1}{2}(x^2+y^2) \\ \frac{1}{2}(x^2+y^2) & b(x,y) \end{pmatrix}.$$

Olyan a, b polinomokat kell keresnünk, amelyre $\det A(x,y) = a(x,y)b(x,y) - \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$ negatív $1 < r^2 := x^2+y^2 < 4$ esetén, továbbá $\det A$ pozitív $r^2 < 1$ és $r^2 > 4$ esetén. Vegyük észre, hogy az $(r^2-1)(r^2-4)$ polinom teljesíti a $\det A$-ra vonatkozó utóbbi feltételeket, így $a(x,y)b(x,y) = (r^2-1)(r^2-4) + \frac{1}{4}r^4 = \frac{5}{4}(r^2 - 2 + \frac{2}{\sqrt{5}})(r^2 - 2 - \frac{2}{\sqrt{5}})$, tehát például $a(x,y) = \frac{5}{4}(x^2+y^2-2+\frac{2}{\sqrt{5}})$ és $b(x,y) = (r^2 - 2 - \frac{2}{\sqrt{5}})$ megfelel a feladat feltételeinek. Egy szebb példát nyerhetünk a következőképpen. Legyen $\det A(x,y) = \frac{1}{2}(r^2-1)(r^2-4)$, ekkor $a(x,y)b(x,y) = \frac{1}{4}(3r^2-4)(r^2-2)$, tehát például $a(x,y) = \frac{1}{4}(3x^2+3y^2-4)$ és $b(x,y) = x^2+y^2-2$ ugyancsak megfelel a feladat feltételeinek.

7. Transzformáljuk kanonikus alakra a következő másodrendű differenciálegyenleteket!

a) $4\partial_{xy}u + 2\partial_y u + u = x + y$

b) $\partial_x^2 u + 2\partial_{xy}u + \partial_y^2 u + \partial_x u + u = x - y$

Megoldás. a) A főrész transzformációjával kezdjük, ennek együtthatómátrixa $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 - 4 = 0$, amelynek gyökei ± 2, a sajátértékek. Könnyen látható, hogy az $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektorok ortonormált sajátvektorok. Szorozzuk meg mindkét sajátvektort a sajátérték abszolútértékének gyökével, és válasszuk az így kapott $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektorokat az új koordinátatengelyeknek. Ekkor a transzformáció áttérési mátrixa

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

amelyre

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(Ez utóbbi inverz könnyen láthatóan úgy nyerhető, hogy az ortonormált sajátvektorokat leosztjuk a hozzá tartozó nemnulla sajátértékkel, és a kapott mátrixot transzponáljuk.) Ennek alapján vezessük be a $(\xi, \eta) = S^{-1}(x,y)$ koordinátákat, azaz

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x+y}{2}, \\ \eta = \dfrac{x-y}{2}, \end{cases}$$

Ekkor a főtengely-transzformáció tétele alapján az új koordinátákra transzformált operátor főrészének együtthatómátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Másrészt az összetett függvény deriválási szabályából egyszerű számolással adódik, hogy

$$(\partial_x u(x,y), \partial_y u(x,y)) = (\partial_\xi v(\xi,\eta), \partial_\eta v(\xi,\eta)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\partial_\xi v(\xi,\eta) + \frac{1}{2}\partial_\eta v(\xi,\eta), \frac{1}{2}\partial_\xi v(\xi,\eta) - \frac{1}{2}\partial_\eta v(\xi,\eta) \right),$$

ami azt jelenti, hogy $\partial_y u = \dfrac{1}{2}\partial_\xi v - \dfrac{1}{2}\partial_\eta v$. Mindezek alapján a kiindulási egyenletünk az

$$\partial_\xi^2 v - \partial_\eta^2 v + \partial_\xi v - \partial_\eta v + v = 2\xi \tag{1}$$

alakot ölti (ahol még azt is felhasználtuk, hogy $x+y=2\xi$). Ezek után az alacsonyabb rendű tagok transzformálását kell már csak elvégeznünk. Vezessük be a $w(\xi,\eta)=v(\xi,\eta)e^{\alpha\xi+\beta\eta}$ függvényt, vagyis $v(\xi,\eta)=w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}$, ahol az α,β konstansok értékeit szeretnénk meghatározni. Rövid számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned}\partial_\xi v(\xi,\eta) &= \partial_\xi w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}-\alpha w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta},\\ \partial_\xi^2 v(\xi,\eta) &= \partial_\xi^2 w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}-2\alpha\partial_\xi w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}+\alpha^2 w(\xi\,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta},\end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned}\partial_\eta v(\xi,\eta) &= \partial_\eta w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}-\beta w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta},\\ \partial_\eta^2 v(\xi,\eta) &= \partial_\eta^2 w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}-2\beta\partial_\eta w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}+\beta^2 w(\xi\,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}.\end{aligned}$$

Ezeket az (1) egyenletbe helyettesítve kapjuk a

$$\begin{aligned}&\partial_\xi^2 w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}-\partial_\eta^2 w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}+\\ &\quad+(1-2\alpha)\partial_\xi w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}+(1-2\beta)\partial_\eta w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}+(1+\beta-\alpha-\beta^2+\alpha^2)w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}=2\xi\end{aligned}$$

egyenletet. A fenti alakból látszódik, hogy célszerű az $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$ választás, hiszen ekkor az elsőrendű tagok kiesnek és a fenti egyenlet a

$$\partial_\xi^2 w(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)}-\partial_\eta^2 w(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)}+w(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)}=2\xi$$

alakra egyszerűsödik. Átszorzással kapjuk, hogy a feladatban szereplő egyenlet kanonikus alakja

$$\partial_\xi^2 w-\partial_\eta^2 w+w=2\xi e^{\frac{1}{2}(\xi+\eta)}.$$

b) A főrész transzformációjával kezdjük, ennek együtthatómátrixa $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, így a karakterisztikus egyenlet $(1-\lambda)^2-1=0$, amelynek gyökei $2,0$ a sajátértékek. Könnyen látható, hogy ortonormált sajátvektorrendszert alkotnak a $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ vektorok. Szorozzuk meg az előbbi sajátvektort a sajátérték gyökével, és válasszuk az így kapott $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ vektorokat az új koordinátatengelyeknek. Ekkor az áttérési mátrix $S=\begin{pmatrix}1&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, amelyre $S^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. (Ez utóbbi inverz könnyen láthatóan úgy nyerhető, hogy az ortonormált sajátvektorokat leosztjuk a hozzá tartozó nemnulla sajátértékkel, és a kapott mátrixot transzponáljuk.) Ennek alapján vezessük be a $(\xi,\eta)=S^T(x,y)$ új változókat, azaz legyen $\xi=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y$ és $\eta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y$, továbbá vezessük be a $v(\xi,\eta)=u(x,y)$ függvényt. Ekkor a főtengelytranszformáció tétele alapján az új koordinátákra transzformált egyenlet főrészének együtthatómátrixa $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. Másrészt az összetett függvény deriválási szabályából egyszerű számolással adódik, hogy

$$(\partial_x u(x,y),\partial_y u(x,y))=(\partial_\xi v(\xi,\eta),\partial_\eta v(\xi,\eta))\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}\partial_\xi v(\xi,\eta)+\frac{1}{2}\partial_\eta v(\xi,\eta),\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\xi v(\xi,\eta)-\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\eta v(\xi,\eta)\right),$$

ami azt jelenti, hogy $\partial_x u=\dfrac{1}{2}\partial_\xi v+\dfrac{1}{2}\partial_\eta v$. Mindezek alapján az egyenletünk az

$$\partial_\xi^2 v+\frac{1}{2}\partial_\xi v+\frac{1}{2}\partial_\eta v+v=\sqrt{2}\eta \tag{2}$$

alakot ölti (ahol még azt is felhasználtuk, hogy $x-y=\sqrt{2}\eta$). Ezek után az alacsonyabb rendű tagok transzformálását kell már csak elvégeznünk. Vezessük be a $w(\xi,\eta)=v(\xi,\eta)e^{\alpha\xi+\beta\eta}$ függvényt, vagyis $v(\xi,\eta)=w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}$, ahol az α,β paraméterek értékeit szeretnénk meghatározni. Rövid számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned}\partial_\xi v(\xi,\eta) &= \partial_\xi w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}-\alpha w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta},\\ \partial_\xi^2 v(\xi,\eta) &= \partial_\xi^2 w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}-2\alpha\partial_\xi w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}+\alpha^2 w(\xi\,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta},\end{aligned}$$

valamint

$$\partial_\eta v(\xi,\eta)=\partial_\eta w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}-\beta w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}.$$

Ezeket a (2) egyenletbe helyettesítve kapjuk a

$$\partial_\xi^2 w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}+\left(\frac{1}{2}-2\alpha\right)\partial_\xi w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}+\frac{1}{2}\partial_\eta w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}+\left(1+\alpha^2-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\alpha\right)w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}=\sqrt{2}\eta$$

egyenletet. A fenti alakból látszódik, hogy célszerű az $\alpha = \dfrac{1}{4}, \beta = \dfrac{15}{8}$ választás, hiszen ekkor a ξ szerinti elsőrendű tag, és a nulladrendű tag kiesik és a fenti egyenlet a

$$\partial_\xi^2 w(\xi,\eta) e^{-\frac{1}{4}\xi - \frac{15}{8}\eta} + \frac{1}{2} w(\xi,\eta) e^{-\frac{1}{4}\xi - \frac{15}{8}\eta} = \sqrt{2}\eta \tag{3}$$

alakra egyszerűsödik. Átszorzással kapjuk, hogy a feladatban szereplő egyenlet alakja az új koordinátákban

$$\partial_\xi^2 w + \frac{1}{2}\partial_\eta w = \sqrt{2}\eta e^{\frac{1}{4}\xi + \frac{15}{8}\eta}.$$

Majdnem készen vagyunk, már csak a $\partial_\eta w$ tag együtthatóját kell lenormálnunk. Ezt úgy tehetjük meg, ha bevezetjük a $\tilde{w}(\xi,\eta) = w(\xi, \frac{1}{2}\eta)$ függvényt. Ekkor $\partial_\xi^2 \tilde{w}(\xi,\eta) = \partial_\xi^2 w(\xi, \frac{1}{2}\eta)$ és $\partial_\eta \tilde{w}(\xi,\eta) = \frac{1}{2} w(\xi, \frac{1}{2}\eta)$. Ezt a (3) egyenletbe helyettesítve kapjuk a feladatban szereplő egyenlet kanonikus alakját:

$$\partial_\xi^2 \tilde{w} + \partial_\eta \tilde{w} = \sqrt{2}\eta e^{\frac{1}{4}\xi + \frac{15}{8}\eta}.$$

*8. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u(x,y) - \partial_y^2 u(x,y) - 2\partial_x u(x,y) + u(x,y) &= y \\ u(x,0) &= e^x \\ \partial_y u(x,0) &= e^x + 1 \end{aligned}$$

Megoldás. A feladat beadható, ezért a megoldást nem árulom el.