A 2. feladatsor megoldása
III. éves alkmat parcdiff 2016. tavasz

1. Keressük meg az alábbi elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletek klasszikus megoldásait!

a) $y\partial_x u(x,y) - x\partial_y u(x,y) = 0$

b) $x\partial_x u(x,y) = y\partial_y u(x,y)$

c) $\partial_x u(x,y) = y\partial_y u(x,y)$

d) $y^2\partial_x u(x,y) + e^x\partial_y u(x,y) = 0$

e) $yz\partial_x u(x,y,z) + xz\partial_y u(x,y,z) + (x^2+y^2)\partial_z u(x,y,z) = 0$

f) $x\partial_x u(x,y,z) + y\partial_y u(x,y,z) + z\partial_z u(x,y,z) = 0$

Megoldás. a) Az egyenlethez tartozó karakterisztikus rendszer a következő:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t). \end{cases}$$

A közönséges differenciálegyenletek elméletéből ismert, hogy ennek megoldása $x(t) = c\sin(t+t_0)$, $y(t) = c\cos(t+t_0)$, ahol a c és t_0 konstansok a kezdeti feltételtől függnek. Nyilván $x^2(t) + y^2(t) = c^2$, azaz $\varphi(x,y) = x^2+y^2$ első integrál. Ennek alapján a feladat általános megoldása $u(x,y) = \Phi(x^2+y^2)$, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges. Megjegyezzük, hogy első integrált a karakterisztikus rendszer megoldásainak ismerete nélkül is tudunk találni. Nevezetesen az első egyenletet $x(t)$-vel, a másodikat $y(t)$-vel szorozva, majd a kapott egyenleteket összegezve $\dot{x}(t)x(t) + \dot{y}(t)y(t) = 0$ adódik. Más szóval $\left(\frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{2}y^2(t)\right)^{\cdot} = 0$, tehát $x^2(t)+y^2(t)$ konstans, így $\varphi(x,y) = x^2+y^2$ első integrál. Az egyenlet klasszikus megoldásai tehát $u(x,y) = \Phi(x^2+y^2)$ alakúak, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges.

b) Az egyenlethez tartozó karakterisztikus rendszer:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \\ \dot{y}(t) = -y(t). \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy ennek megoldása $x(t) = c_1e^t$, $y(t) = c_2e^{-t}$, ahol a c_1, c_2 konstansok a kezdeti feltételtől függnek. Ekkor nyilván $x(t)y(t) = c_1c_2$, azaz $\varphi(x,y) = xy$ első integrál. Ennek megfelelően a feladat általános megoldása $u(x,y) = \Phi(xy)$, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges. A karakterisztikus rendszer megoldásainak ismerete nélkül is találhattunk volna első integrált, nevezetesen szorozzuk az első egyenletet $y(t)$-vel, a másodikat $x(t)$-vel, majd összegezzük a kapott egyenleteket. Ekkor $\dot{x}(t)y(t) + \dot{y}(t)x(t) = 0$ adódik, azaz $(x(t)y(t))^{\cdot} = 0$, vagyis $x(t)y(t)$ konstans, tehát $\varphi(x,y) = xy$ első integrál. Vigyázzunk az $xy = c$ görbék kétágú hiperbolák, a két ágon a megoldásnak nem kell megegyeznie, ezért az egyenlet klasszikus megoldásai nem csak az $u(x,y) = \Phi(xy)$ alakú függvények. Könnyen gyárthatunk például olyan megoldást, amelyre $u(-1,-1) \neq u(1,1)$.

c) Az egyenlethez tartozó karakterisztikus rendszer:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = -y(t). \end{cases}$$

Ennek megoldása $x(t) = t + c_1$, $y(t) = c_2e^{-t}$. Ekkor nyilván $e^{x(t)}y(t) = c_2e^{c_1}$, tehát $\varphi(x,y) = e^xy$ első integrál, és így a feladat általános megoldása $u(x,y) = \Phi(e^xy)$, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges.

d) Az egyenlethez tartozó karakterisztikus rendszer:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y^2(t) \\ \dot{y}(t) = e^{x(t)}. \end{cases}$$

A rendszer megoldásait (nagy valószínűséggel) explicit módon nem tudjuk megadni, de így is tudunk első integrált találni. Szorozzuk össze a két egyenletet úgy, hogy az egyenletek ellentétes oldalait szorozzuk egymással, ekkor $\dot{y}(t)y^2(t) = e^{x(t)}\dot{x}(t)$ adódik. Ez azt jelenti, hogy $\left(\frac{y^3(t)}{3} - e^{x(t)}\right)^{\cdot} = 0$, vagyis $\varphi(x,y) = \frac{y^3}{3} - e^x$ első integrál. Ennek megfelelően a feladat általános megoldása $u(x,y) = \Phi(\frac{y^3}{3} - e^x)$, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges.

e) Az egyenlethez tartozó karakterisztikus rendszer:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t)z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t)z(t) \\ \dot{z}(t) = x^2(t) + y^2(t). \end{cases}$$

A rendszer megoldásait (nagy valószínűséggel) explicit módon nem tudjuk megadni, de első integrálokat könnyen találhatunk. Először használjuk csak az első két egyenletet, szorozzuk az elsőt $x(t)$-vel, a másodikat $y(t)$-vel és vonjuk ki egymásból őket. Ekkor $\dot{x}(t)x(t) - \dot{y}(t)y(t) = 0$ adódik, azaz $\left(\frac{1}{2}x^2(t) - \frac{1}{2}y^2(t)\right)^{\cdot} = 0$, vagyis $\varphi_1(x, y, z) = x^2 - y^2$ első integrál. Most szorozzuk meg a harmadik egyenletet $z(t)$-vel és használjuk fel az első két egyenletet. Ekkor $\dot{z}(t)z(t) = x(t)x(t)y(t) + y(t)y(t)z(t) = x(t)\dot{y}(t) + y(t)\dot{x}(t) = (x(t)y(t))^{\cdot}$ adódik, azaz $\left(\frac{1}{2}z^2(t) - x(t)y(t)\right)^{\cdot} = 0$, vagyis $\varphi_2(x, y, z) = \frac{1}{2}z^2 - xy$ első integrál. Könnyen látható, hogy φ_1, φ_2 független függvények, így a feladat általános megoldása $u(x, y, z) = \Phi(x^2 - y^2, \frac{1}{2}z^2 - xy)$, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges.

f) Az egyenlethez tartozó karakterisztikus rendszer:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \\ \dot{y}(t) = y(t) \\ \dot{z}(t) = z(t). \end{cases}$$

Ennek megoldása $x(t) = c_1 e^t, y(t) = c_2 e^t, z(t) = c_3 e^t$. Világos, hogy $\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{c_1}{c_2}$ és $\frac{y(t)}{z(t)} = \frac{c_2}{c_3}$, vagyis $\varphi_1(x, y, z) = \frac{x}{y}$, $\varphi_2(x, y, z) = \frac{y}{z}$ első integrálok. Könnyen látható, hogy ezek független függvények, így a feladat általános megoldása $u(x, y, z) = \Phi(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges.

2. Keressük meg az alábbi elsőrendű kvázilineáris parciális differenciálegyenletek klasszikus megoldásait!

a) $yu(x, y)\partial_x u(x, y) + xu(x, y)\partial_y u(x, y) = x^2 + y^2$

b) $y\partial_x u(x, y) - x\partial_y u(x, y) = 2xyu(x, y)$

Megoldás. a) Az egyenlethez tartozó segédfeladat:

$$yu\partial_x v(x, y, u) + xu\partial_y v(x, y, u) + (x^2 + y^2)\partial_u v(x, y, u) = 0.$$

Ennek általános megoldása az 1. feladat e) része alapján $v(x, y, u) = \Phi(x^2 - y^2, \frac{1}{2}u^2 - xy)$, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges. Ekkor a feladatunk u megoldását úgy nyerjük, hogy a $\Phi(x^2 - y^2, \frac{1}{2}u^2 - xy) = 0$ implicit egyenletből kifejezzük u-t. Az implicitfüggvény-tétel miatt létezik $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ függvény úgy, hogy $\frac{1}{2}u^2 - xy = \Psi(x^2 - y^2)$, és így a feladat általános megoldása $u(x, y) = \pm\sqrt{2xy + \Psi(x^2 - y^2)}$, ahol $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges (amelyre a négyzetgyök alatt pozitív kifejezés áll).

b) Az egyenlethez tartozó segédfeladat:

$$y\partial_x v(x, y, u) - x\partial_y v(x, y, u) + 2xyu\partial_u v(x, y, u) = 0.$$

Ehhez az alábbi karakterisztikus rendszer tartozik:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) \\ \dot{u}(t) = 2x(t)y(t)u(t). \end{cases}$$

Az első két egyenletből látszik (lásd az 1. feladat a) részét), hogy $\varphi_1(x, y, u) = x^2 + y^2$ első integrál. Most a harmadik egyenletben használjuk fel az elsőt és osszunk le $u(t)$-vel. Ekkor $\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = 2\dot{x}(t)x(t)$ adódik, azaz $\left(\log|u(t)| - x^2(t)\right)^{\cdot} = 0$, vagyis $\varphi_2(x, y, u) = \log|u| - x^2$ első integrál, amely könnyen láthatóan független az előbbitől. Ennek megfelelően $v(x, y, u) = \Phi(x^2 + y^2, \log|u| - x^2)$, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges. Ekkor a feladatunk u megoldását úgy nyerjük, hogy a $\Phi(x^2 + y^2, \log|u| - x^2) = 0$ implicit egyenletből kifejezzük u-t. Az implicitfüggvény-tétel miatt létezik $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ függvény úgy, hogy $\log|u| - x^2 = \Psi(x^2 + y^2)$, és így a feladat általános megoldása $u(x, y) = \pm e^{x^2 + \Psi(x^2 + y^2)}$, ahol $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges. Jegyezzük meg, hogy ha Ψ tetszőleges függvény, akkor $\pm e^{\Psi(x^2+y^2)}$ valójában tetszőleges, $(x^2 + y^2)$-től függő függvény lehet, vagyis az u megoldást (a valamivel egyszerűbb) $u(x, y) = e^{x^2}\tilde{\Psi}(x^2 + y^2)$ alakban is felírhatjuk.

3. Oldjuk meg az alábbi Cauchy-feladatokat!

a) $x\partial_x u(x, y) - y\partial_y u(x, y) = 0, \quad u(x, \frac{1}{x}) = 1$

b) $x\partial_x u(x, y) - y\partial_y u(x, y) = 0, \quad u(x, \frac{1}{x}) = x$

c) $x\partial_x u(x, y) - y\partial_y u(x, y) = 0, \quad u(x, y) = u(-x, -y), u(x, x^2) = x$

d) $yu(x, y)\partial_x u(x, y) + xu(x, y)\partial_y u(x, y) = x^2 + y^2, \quad u(x, 0) = x^2$

e) $x\partial_x u(x, y) + y\partial_y u(x, y) = u(x, y), \quad u(x, 1) = x^2$

f) $x\partial_x u(x, y) - \partial_y u(x, y) = 1, \quad u(x, 0) = x$

Megoldás. a) Az 1. feladat b) részében láttuk, hogy az egyenlet megoldásai az $xy = c$ hiperbolák ágai mentén állandók. Ekkor az $u(x, \frac{1}{x}) = 1$ mellékfeltétel pontosan azt jelenti, hogy egy hiperbola ágán megadtuk a megoldást, a többin viszont a megoldásra semmi megkötés nincs. Következésképpen végtelen sok megoldás létezik.

b) Most a mellékfeltétel azt jelenti, hogy az $y = 1/x$ hiperbolán a megoldás az identitás, amely nem konstans, így nem létezhet megoldás, hiszen a hiperbolák ágain a megoldásnak állandónak kell lennie.

c) Most az $u(x,y) = u(-x,-y)$ mellékfeltétel miatt az $xy = c$ hiperbola két ágán ugyanazt a konstanst kell felvennie a megoldásnak, így ebben az esetben a klasszikus megoldások $u(x,y) = \Phi(xy)$ alakúak, így az $u(x,x^2) = x$ mellékfeltételből $\Phi(x^3) = x$. Vezessük be a $w = x^3$ új változót, ekkor $x = \sqrt[3]{w}$, tehát $\Phi(w) = \sqrt[3]{w}$. Végeredményben $u(x,y) = \sqrt[3]{xy}$. Az előző két résszel ellentétben most a mellékfeltételt egy olyan görbén (parabolán) írtuk elő, amely minden karakterisztikus görbét legfeljebb egyszer metsz. A fentiek alapján érezhető, hogy ha a kezdeti görbe (legfeljebb) egyszer metsz minden karakterisztikus görbét, akkor várható a klasszikus megoldás egyértelműsége.

d) A 2. feladat a) részéből következően az egyenlet általános megoldása $u(x,y) = \pm\sqrt{2xy + \Psi(x^2 - y^2)}$. A mellékfeltétel miatt $\pm\sqrt{\Psi(x^2)} = x^2$, így egyrészt a pozitív előjelet kell választanunk, másrészt pedig $\Psi(x^2) = x^4$, tehát $\Psi(t) = t^2$. Végeredményben $u(x,y) = \sqrt{2xy + (x^2 - y^2)^2}$.

e) Az egyenlethez tartozó segédfeladat:

$$x\partial_x v(x,y,u) + y\partial_y v(x,y,u) + u\partial_u v(x,y,u) = 0.$$

Ehhez az alábbi karakterisztikus rendszer tartozik:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \\ \dot{y}(t) = y(t) \\ \dot{u}(t) = u(t). \end{cases}$$

Az 1. feladat f) részében hasonló rendszert oldottunk meg, az ott leírtak alapján $v(x,y,u) = \Phi(\frac{x}{y}, \frac{u}{y})$, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges. Ekkor a feladatunk u megoldását úgy nyerjük, hogy a $\Phi(\frac{x}{y}, \frac{u}{y}) = 0$ implicit egyenletből kifejezzük u-t. Az implicitfüggvény-tétel miatt létezik $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ függvény úgy, hogy $\frac{u}{y} = \Psi(\frac{x}{y})$, és így az egyenlet általános megoldása $u(x,y) = y\Psi(\frac{x}{y})$, ahol $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges. A mellékfeltételből adódóan $x^2 = u(x,1) = \Psi(x)$, ezért $u(x,y) = \frac{x^2}{y}$.

f) Az egyenlethez tartozó segédfeladat:

$$x\partial_x v(x,y,u) - y\partial_y v(x,y,u) + \partial_u v(x,y,u) = 0.$$

Ehhez az alábbi karakterisztikus rendszer tartozik:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \\ \dot{y}(t) = -1 \\ \dot{u}(t) = 1. \end{cases}$$

A második és harmadik egyenletből $(u+y)^{\cdot} = 0$, tehát $u + y = c$, vagyis $\varphi_1(x,y,u) = u + y$ első integrál. Másrészt az első egyenletből $x(t) = c_1 e^t$, a másodikból $y(t) = -t + c_2$, ezért $x(t)e^y(t) = c_1 e^{c_2}$, így $\varphi_2(x,y,u) = xe^y$ is első integrál (hasonlót az 1. feladat c) részében is láttunk). Ekkor $v(x,y,u) = \Phi(xe^y, u+y)$, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges. Ekkor a feladatunk u megoldását úgy nyerjük, hogy a $\Phi(xe^y, u+y) = 0$ implicit egyenletből kifejezzük u-t. Az implicitfüggvény-tétel miatt létezik $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ függvény úgy, hogy $u + y = \Psi(xe^y)$, és így az egyenlet általános megoldása $u(x,y) = \Psi(xe^y) - y$, ahol $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges. A mellékfeltételből adódóan $x = u(x,0) = \Psi(x)$, ezért $u(x,y) = xe^y - y$.

4. Tekintsük az $y\partial_x u(x,y) - x\partial_y u(x,y) = y$ egyenletet. Van-e $u(0,y) = y$ mellékfeltételt kielégítő $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldása?

Megoldás. Az egyenlethez tartozó segédegyenlet:

$$y\partial_x v(x,y,u) - x\partial_y v(x,y,u) + y\partial_u v(x,y,u) = 0.$$

Ehhez a következő karakterisztikus rendszer tartozik:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) \\ \dot{u}(t) = y(t) \end{cases}$$

Az első két egyenletből látszik (lásd az 1. feladat a) részét), hogy $\varphi_1(x,y,u) = x^2 + y^2$ első integrál. Most a harmadik egyenletből kivonva az elsőt $\dot{u}(t) - \dot{x}(t) = 0$ adódik, azaz $(u(t) - x(t))^{\cdot} = 0$, vagyis $\varphi_2(x,y,u) = u - x$ első integrál, amely könnyen láthatóan független az előbbitől. Így $v(x,y,u) = \Phi(x^2 + y^2, u - x)$, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges. Ekkor az eredeti egyenletünk u megoldását úgy nyerjük, hogy a $\Phi(x^2 + y^2, u - x) = 0$ implicit egyenletből kifejezzük u-t. Az implicitfüggvény-tétel miatt létezik $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ függvény úgy, hogy $u - x = \Psi(x^2 + y^2)$, és így a feladat általános megoldása $u(x,y) = x + \Psi(x^2 + y^2)$, ahol $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges. A mellékfeltételt figyelembe véve $y = u(0,y) = \Psi(y^2)$ adódik. Az $y = 1$ és $y = -1$ választással kapjuk, hogy az $1 = \Psi(1^2) = \Psi((-1)^2) = -1$ összefüggésnek kellene teljesülnie, ami lehetetlen. Ebből következően a feladatunknak nincs $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldása. Jegyezzük meg, hogy globálisan $\mathbb{R}^2$-en nincs klasszikus megoldás, de lokálisan $y > 0$ vagy $y < 0$ esetén (tehát az alsó vagy felső félsíkban) van. Valóban, ha a mellékfeltételt csak a felső félsíkban követeljük meg, akkor a $\Psi(y^2) = y$ feltételből $\Psi(w) = \sqrt{w}$ adódik. Így a megoldás $u(x,y) = x + \sqrt{x^2 + y^2}$ $(x \in \mathbb{R}, y > 0)$. Hasonlóan, ha a mellékfeltételt az alsó félsíkban írjuk csak elő, akkor a megoldás $u(x,y) = x - \sqrt{x^2 + y^2}$ $(x \in \mathbb{R}, y < 0)$.

5. Keressük meg az $y\partial_x u(x,y) - x\partial_y u(x,y) = x^3y + xy^3$ parciális differenciálegyenletnek azon megoldását, amely illeszkedik az y tengelyre.

Megoldás. A feladathoz tartozó segédegyenlet a következő:

$$y\partial_x u(x,y) - x\partial_y u(x,y) + (x^3y + xy^3)\partial_u v(x,y,u) = 0.$$

Ehhez az alábbi karakterisztikus rendszer tartozik:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) \\ \dot{u}(t) = x^3(t)y(t) + x(t)y^3(t). \end{cases}$$

Az első két egyenletből (az 1. feladat a) része alapján) adódik, hogy $\varphi_1(x,y,u) = x^2 + y^2$ első integrál. Másrészt az első egyenletet $-x^3$-nal, a másodikat y^3-nal szorozva, majd a kapott egyenleteket a harmadik egyenlethez hozzáadva kapjuk, hogy $\dot{u} + \dot{y}y^3 - \dot{x}x^3 = 0$, azaz $\left(u + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4}x^4\right)^{\cdot} = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\varphi_2(x,y,u) = u + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4}x^4$ első integrál. Így $v(x,y,u) = \Phi(x^2+y^2, u + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4}x^4)$, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Az implicitfüggvény-tétel miatt létezik $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ úgy, hogy $u + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4}x^4 = \Psi(x^2+y^2)$. Ebből következően a feladat általános megoldása $u(x,y) = \Psi(x^2+y^2) + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4$, ahol $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges. Most keressük meg azt a konkrét Ψ függvényt, amely esetén az u megoldás az y tengelyre illeszkedik. Az, hogy a megoldás illeszkedik az y tengelyre, azt jelenti, hogy $u(0,y) = 0$. A megoldás általános alakjából látszik, hogy ekkor szükségképpen $\Psi(y^2) = \frac{1}{4}y^4$, vagyis $\Psi(y) = \frac{1}{4}y^2$. Végeredményben tehát $u(x,y) = \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4 = \frac{1}{2}x^4 + x^2y^2$.

6. Legyen $H \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f, g \in C(\mathbb{R})$. Adjuk meg az alábbi rendszerek első integráljait!

a) $\begin{cases} \dot{x} = \partial_2 H(x,y) \\ \dot{y} = -\partial_1 H(x,y) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dot{x} = f(y) \\ \dot{y} = g(x) \end{cases}$

Megoldás. a) Vegyük észre, hogy H (az úgynevezett Hamilton-függvény) éppen első integrál, hiszen

$$(H(x,y))^{\cdot} = H'(x,y)\cdot(\dot{x},\dot{y}) = (\partial_1 H(x,y), \partial_2 H(x,y))\cdot(\dot{x},\dot{y}) = \partial_1 H(x,y)\partial_2 H(x,y) - \partial_2 H(x,y)\partial_1 H(x,y) = 0.$$

A fenti típusú rendszert szokás Hamilton-féle rendszernek nevezni.

b) Gondoljuk meg, hogy ez a rendszer speciális esete az a) pontban szereplő Hamilton-féle rendszernek. Valóban, legyen az f, g függvények primitív függvénye rendre F és G. Ekkor a $H(x,y) = F(y) - G(x)$ függvényre $f(y) = \partial_2 H(x,y)$ és $-\partial_1 H(x,y) = g(x)$. Az a) pont alapján ez azt jelenti, hogy $H(x,y) = F(y) - G(x)$ első integrál. Jegyezzük meg, hogy a fentiek alapján az $f(y)\partial_x u + g(x)\partial_y u = 0$ egyenlet klasszikus megoldásai $u(x,y) = \Phi(F(y) - G(x))$ alakúak, ahol $F' = f$, $G' = g$ és $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges.

Megjegyezzük, hogy az a) részbeli rendszer egy úgynevezett Hamilton-féle rendszer. Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) ír fizikus, matematikus 1833-ban a Newtoni-mechanikát új alapokra helyezte, a Hamilton-féle függvény bevezetése ehhez kapcsolódik. Az (x,y) változókra gondolhatunk mint tér és momentumkoordinátákra, ekkor a Hamilton-függvény a rendszer mozgási és potenciális energiájának összege (amely állandó). Hamilton nevéhez egyébként a kvaterniók felfedezése is fűződik, vagy például a ∇ vektor bevezetése.

*7. Keressük meg a $\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0$ egyenlet klasszikus megoldásait úgy, hogy új függvény bevezetésével az egyenletet elsőrendűvé transzformáljuk.

Megoldás. A feladat beadható, ezért a megoldást nem árulom el.