Az 1. feladatsor megoldása
III. éves alkmat parcdiff 2016. tavasz

1. Keressük meg az alábbi egyenletek $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klasszikus megoldásait!

a)	$\partial_y u = 0$	e)	$\partial_x u - \partial_y u = 0$
b)	$\partial_{xy} u = 0$	f)	$\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0$
c)	$\partial_{xy} u = \dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$	g)	$\partial_x^2 u - a^2\partial_y^2 u = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$
d)	$\partial_{xy} u + 2x\partial_y u = x$	h)	$(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = 0$

Megoldás. a) $\partial_y u = 0 \iff u(x,y) = c(x)$, ahol $c \in C^1(\mathbb{R})$.

b) $\partial_{xy} u = \partial_x(\partial_y u) = 0 \iff \partial_y u = c(y) \iff u(x,y) = C(y) + D(x)$, ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R})$.

c) $\partial_{xy} u = \dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2} \iff \partial_y u = -\dfrac{2y}{x^2+y^2} + c(y) \iff u(x,y) = -\log(x^2+y^2) + C(y) + D(x)$, ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R})$. Annyit azért jegyezzük meg, hogy a megoldás csak az $\mathbb{R} \setminus \{0,0\}$ halmazon értelmezett.

d) Legyen y rögzített és definiáljuk a $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt a $v(x;y) = \partial_y u(x,y)$ hozzárendeléssel (ahol most y paraméter). Ekkor a feladatunk a $v'(x;y) + 2xv(x;y) = x$ alakot ölti (ahol „$'$" az x szerinti deriválást jelenti). Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát e^{x^2}-tel, ekkor $e^{x^2}v'(x;y) + 2xe^{x^2}v(x;y) = xe^{x^2}$ adódik. Vegyük észre, hogy a bal oldalon éppen az $x \mapsto e^{x^2}v(x;y)$ függvény (x szerinti) deriváltja áll, a jobb oldalon pedig az $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$ függvény (x szerinti) deriváltja, így az egyenlet mindkét oldalát x szerint integrálva $e^{x^2}v(x;y) = \frac{1}{2}e^{x^2} + c(y)$ adódik (mivel y paraméter v-ben, ezért az integrálás során keletkező c konstans függ y-tól). Innen rendezéssel $v(x;y) = \frac{1}{2} + c(y)e^{-x^2}$ adódik. Mivel $v(x;y) = \partial_y u(x,y)$, ezért $u(x,y) = \frac{1}{2}y + C(y)e^{-x^2} + D(x)$, ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R})$. Megjegyezzük, hogy az $e^{x^2}v'(x;y) + 2xe^{x^2}v(x;y) = xe^{x^2}$ egyenletet úgy is megoldhattuk volna, hogy először a homogén probléma megoldását keressük meg, és utána a konstans variálásának módszerével (Lagrange-módszer) megadunk egy partikuláris megoldást. Sőt, úgy is célhoz értünk volna, ha a kiindulási egyenletet szorozzuk e^{x^2}-tel és észrevesszük, hogy az így kapott egyenlet bal oldalán éppen $\partial_{xy}(e^{x^2}u(x,y))$ áll. Végül az is célravezető lett volna, ha először y szerint integráljuk az egyenletet, majd az $x \mapsto u(x,y)$ függvényre kapott közönséges differenciálegyenletet megoldjuk. Valójában az előbbi módszerek mindegyike mögött ugyanaz a gondolat rejlik.

e) I. megoldás. Legyen $v = (1,-1)$. Ekkor a feladat azt jelenti, hogy $0 = (\partial_x u, \partial_y u)\cdot v = \partial_v u$, más szóval az u függvény v irányban vett iránymenti deriváltja (minden pontban) 0. Ez azt jelenti, hogy az $x + y = \text{const}$ egyenesek mentén u konstans. Így $u(x,y) = c(x+y)$, ahol $c \in C^1(\mathbb{R})$.

II. megoldás. Az előbbi megoldás adhatja azt az ötletet számunkra, hogy forgassuk el (és esetleg nyújtsuk meg vagy nyomjuk össze) a koordinátarendszert úgy, hogy valamelyik tengely iránya az $(1,-1)$ vagy $(-1,1)$ vektor legyen. Például legyen $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, és térjünk át (ξ,η) koordinátákra (ez a koordinátarendszer $45°$-os negatív irányú forgatását és kétszeres nyújtását jelenti). Ekkor $u(x,y) = U(\xi,\eta)$, így

$$(\partial_x u(x,y), \partial_y u(x,y)) = u'(x,y) = U'(\xi,\eta)\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{pmatrix} = (\partial_\xi U(\xi,\eta), \partial_\eta U(\xi,\eta))\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

ami azt jelenti, hogy

$$\partial_x u = \partial_\xi U + \partial_\eta U$$
$$\partial_y u = \partial_\xi U - \partial_\eta U.$$

Ebből következően $\partial_x u - \partial_y u = 2\partial_\eta U$, tehát feladatunk a $\partial_\eta U = 0$ alakot ölti. Ennek megoldása (az a) rész alapján) $U(\xi,\eta) = C(\xi)$, vagyis $u(x,y) = C(x+y)$, ahol $C \in C^1(\mathbb{R})$.

f) Az előző rész megoldását folytatva könnyen látható, hogy

$$\partial_x^2 u = \partial_\xi(\partial_\xi U + \partial_\eta U) + \partial_\eta(\partial_\xi U + \partial_\eta U) = \partial_\xi^2 U + 2\partial_{\xi\eta}U + \partial_\eta^2 U$$
$$\partial_y^2 u = \partial_\xi(\partial_\xi U - \partial_\eta U) - \partial_\eta(\partial_\xi U - \partial_\eta U) = \partial_\xi^2 U - 2\partial_{\xi\eta}U + \partial_\eta^2 U.$$

Így $\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 4\partial_{\xi\eta}U$, vagyis feladatunk alakja $\partial_{\xi\eta}U = 0$. Ennek megoldása (a b) rész alapján) $U(\xi,\eta) = C(\xi) + D(\eta)$, azaz $u(x,y) = C(x+y) + D(x-y)$, ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R})$.

g) Először tegyük fel, hogy $a \neq 0$. Legyen u megoldása a $\partial_x^2 u - a^2\partial_y^2 u = 0$ egyenletnek, és vezessük be a $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényt, amelyre $v(x,y) = u(x,ay)$. Ekkor $\partial_x^2 v(x,y) - \partial_y^2 v(x,y) = \partial_x^2 u(x,ay) - a^2\cdot\partial_y u(x,ay) = 0$, hiszen u megoldása a $\partial_x^2 u - a^2\partial_y^2 u = 0$ feladatnak. Ennek megfelelően v kielégíti a $\partial_x^2 v(x,y) - \partial_y^2 v(x,y) = 0$ differenciálegenletet, így az f) rész alapján $v(x,y) = c(x+y) + d(x-y)$, tehát $u(x,y) = v(x, \frac{1}{a}y) = c(x + \frac{1}{a}y) + d(x - \frac{1}{a}y) = c(\frac{1}{a}(ax+y)) + d(\frac{1}{a}(ax-y)) = C(y+ax) + D(y-ax)$, ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R})$. Most vizsgáljuk meg az $a = 0$ esetet! Ekkor az egyenlet $\partial_x^2 u(x,y) = 0$ alakra egyszerűsödik. Nyilván $\partial_x u(x,y) = C(y)$, és így $u(x,y) = xC(y) + D(y)$, ahol, $C, D \in C^2(\mathbb{R})$.

Írjuk át az egyenletet (t,x) változókra (t az időt jelképezi, x pedig a térváltozó), ekkor $\partial_t^2 u - a^2\partial_x^2 u = 0$ az egydimenziós hullámegyenlet. A megoldásokat $u(t,x) = C(x+at) + D(x-at)$ alakban írhatjuk. Vegyük észre, hogy $C(x-at)$ egy a

sebességgel balra utazó hullám, $D(x+at)$ pedig jobbra utazó hullám. Ezek összege (szuperpozíciója) adja a hullámegyenlet általános megoldását. Megjegyezzük, hogy a hullámegyenletet először Brook Taylor (1685–1731) írta fel (a mechanika törvényei alapján), a fenti megoldást pedig Jean le Rond D'Alembert (1717–1783) adta meg 1747-ben. A szuperpozíció elvét Daniel Bernoulli (1700–1782) fogalmazta meg először 1753-ban.

h) Vegyük észre, hogy a bal oldal majdnem mindig pozitív, kivéve ha $\partial_x u(x,y) = \partial_y u(x,y) = 0$ minden (x,y) esetén. Ebből következően $u(x,y) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$.

2. Adjuk meg a $\partial_x^2 u(x,y,z) = 0$ feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ általános megoldását!

Megoldás. Mivel $\partial_x^2 u(x,y,z) = \partial_x(\partial_x u(x,y,z)) = 0$, ezért $\partial_x u(x,y,z) = C(y,z)$, így $u(x,y,z) = xC(y,z) + D(y,z)$, ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R}^2)$ függvények.

3. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladatok $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

a) $\begin{cases} \partial_{xy} u = x + y \\ u(x,x) = x \\ \partial_1 u(x,x) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0 \\ u(0,y) = 1 \\ \partial_x u(0,y) = 1 \end{cases}$

Megoldás. a) $\partial_{xy} u = x + y \iff \partial_x u = xy + \frac{1}{2}y^2 + c(x)$. Ekkor $0 = \partial_x u(x,x) = \frac{3}{2}x^2 + c(x)$, így $c(x) = -\frac{3}{2}x^2$, azaz $\partial_x u(x,y) = xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}x^2$. Ebből következően $u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}x^3 + d(y)$. Mivel $x = u(x,x) = \frac{1}{2}x^3 + d(x)$, ezért $d(x) = x - \frac{1}{2}x^3$. Mindezek alapján $u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}y^3 + y$.

b) (A feladatban szereplő $\partial_1 u(x,x)$ jelölés úgy értendő, hogy $(\partial_1 u)(x,x)$.) Az 1. feladat f) része alapján tudjuk, hogy $u(x,y) = C(x+y) + D(x-y)$, ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R})$. Az u-ra kirótt mellékfeltételek a C, D függvényekre nézve a következőt jelentik:

$$\begin{cases} 1 = C(y) + D(-y) \\ 1 = C'(y) + D'(-y). \end{cases}$$

Az első egyenletet y szerint deriválva kapjuk, hogy $0 = C'(y) - D'(-y)$. Ezt a második egyenlethez hozzáadva $2C'(y) = 1$ adódik, ami azt jelenti, hogy $C(y) = \frac{1}{2}y + c$, ahonnan $D(y) = 1 + \frac{1}{2}y - c$. Végeredményben tehát

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(x+y) + c + 1 - \frac{1}{2}(x-y) - c = x + 1.$$

4. Keressük meg a $\partial_x^2 u - \partial_y u = 0$ egyenlet $u(x,y) = X(x)Y(y)$ alakú klasszikus megoldásait!

Megoldás. Az egyenletbe behelyettesítve az $X(x)Y(y)$ függvényt $X''(x)Y(y) - X(x)Y'(y) = 0$ adódik, azaz (formálisan leosztva, nem törődve az esetleges 0-val való osztással) $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)}$ minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén. Az előbbi egyenlet bal oldala csak x-től, a jobb oldal pedig csak y-tól függ. Ennek következtében $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \alpha \in \mathbb{R}$, amelynek megoldása $Y(y) = ce^{\alpha y}$, és α előjelétől függően

$$X(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{\alpha}x} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha}x}, & \text{ha } \alpha > 0, \\ c_1 x + c_2, & \text{ha } \alpha = 0, \\ c_1 \sin(\sqrt{|\alpha|}x) + c_2 \cos(\sqrt{|\alpha|}x), & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases}$$

(Valójában a fenti függvények között, a látszat ellenére, szoros kapcsolat van: mindegyik az $\alpha e^{\sqrt{-\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ függvényből származik, ahol α, β komplex számok. Ha $\lambda < 0$, akkor visszakapjuk az exponenciális függvények lineáris kombinációját, amely valójában szinusz-hiperbolikusz és koszinusz-hiperbolikusz függvények lineáris kombinációja. A $\lambda > 0$ esetben a kitevőben tisztán képzetes szám áll, így ekkor a szinusz és koszinusz függvények lineáris kombinációját nyerjük. A $\lambda = 0$ eset $\lambda \to 0$ határátmenettel kapható. Ebben az esetben nyerjük a konstans függvényeket, valamint az $\frac{1}{\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x})$ hányadosból (amely ugyancsak megoldás) $\lambda \to 0$ esetén adódó $\mathrm{const} \cdot x$ függvényeket.) Az így kapott $u(x,y) = X(x)Y(y)$ alakú függvények mind kielégítik a fenti egyenletet. Vigyázzunk, a feladat nem állítja, hogy csak ilyen alakú megoldásai lehetnek az egyenletnek, például $u(x,y) = x^2 + 2y$ is megoldás, de könnyen láthatóan nem áll elő szorzat alakban. Azt azért mindenesetre várhatjuk, hogy a fenti speciális alakú negoldások végtelen lineáris kombinációi esetleg előállíthatják az összes megoldást. Később ez a módszer lesz a megoldások Fourier-sor alakban való keresése.

5. Keressünk $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ polinomokat, amelyekre $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$.

Megoldás. Próbálgatással (illetve a határozatlan együtthatók módszerével) könnyen találhatunk néhány alacsonyabb fokú polinomot, amelyekre teljesül a kívánt egyenlet. Például a konstans polinomok, $x, y, x^2 - y^2$. Felmerül a kérdés, vajon hogyan adható meg olyan n-edfokú polinom, amely kielégíti a kívánt egyenletet. A komplex függvénytanból ismeretes, hogy a $\Delta u = 0$ feladat klasszikus megoldásai két dimenzióban $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y)$ alakúak, ahol $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tetszőleges reguláris függvény. Legyen $f(z) = z^n$, más szóval $f(x+iy) = (x+\mathrm{i}y)^n$, ekkor f reguláris, tehát az előbbi megjegyzés miatt teljesül rá a $\Delta u = 0$ egyenlet. Másrészt $\operatorname{Re} f$ nyilván kétváltozós polinom. Az első néhány ilyen polinom például: x, $x^2 - y^2$, $x^3 - 3xy^2$, stb. Jegyezzük meg, hogy $\operatorname{Im} f$ is megfelelő polinomot ad, ezek mind eleget tesznek a feladat kívánalmainak. Megemlítjük, hogy (adott tartományon) a $\Delta u = 0$ egyenletnek eleget tevő függvényeket harmonikus függvényeknek nevezzük (amelyek a későbbiekben részletesebben is előkerülnek majd). A fentiek alapján tehát sikerült minden n természetes számra megadtunk két n-edfokú harmonikus polinomot. Megmutatjuk, hogy ezzel lényegében előállítottuk az összes kétváltozós harmonikus polinomot, pontosabban a fentiekben kapott polinomok a kétváltozós harmonikus polinomok vektorterének egy bázisát alkotják. A függetlenségük nyilvánvaló, így elég belátnunk, hogy a homogén n-edfokú harmonikus polinomok vektortere $n \geq 1$ esetén kétdimenziós. Adott $n \geq 1$ esetén tekintsük tehát az $\{x^j y^k : j + k = n, j, k \geq 0\}$ homogén n-edfokú polinomok (mint bázisvektorok) által meghatározott P_n vektorteret. Világos, hogy a Δ lineáris operátor P_n-et P_{n-2}-be képezi. Az $x^j y^k$ monom valamelyik kitevőjére vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy $\Delta\colon P_n \to P_{n-2}$ szürjektív. Ebből következően $\dim \operatorname{Ker} \Delta = \dim P_n - \dim P_{n-2}$. Most már csak azt kell észrevennünk, hogy a P_n vektortér $(n+1)$ dimenziós, (hiszen a $j + k = n$ felbontásban j-re $(n+1)$ választási lehetőségünk van, és ezzel k is egyértelműen meg van határozva), így $\dim P_n - \dim P_{n-2} = n + 1 - (n-1) = 2$, ezért a homogén n-edfokú harmonikus polinomok vektortere kétdimenziós. E tér egy bázisát a fentiekben megadtuk. Általában egy n-edfokú harmonikus polinomot felírhatunk, mint a homogén n-edfokú, $(n-1)$-edfokú stb. polinomok összege, e polinomokat pedig a fenti báziselemek segítségével írhatjuk fel, tehát bármely harmonikus polinomot egyértelműen előállíthatunk a $\operatorname{Re}(x+iy)^n$ és $\operatorname{Im}(x+iy)^n$ alakú polinomok lineáris kombinációjaként.

6. Tegyük fel, hogy az $u \in C^4(\mathbb{R}^2)$ függvényre $\Delta u = 0$. Igazoljuk, hogy ekkor a $v(x,y) := (x^2+y^2)u(x,y)$ függvényre $\Delta^2 v = 0$.

Megoldás. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\partial_x v(x,y) = 2xu(x,y) + (x^2+y^2)\partial_x u(x,y), \qquad \partial_y v(x,y) = 2yu(x,y) + (x^2+y^2)\partial_y u(x,y),$$

ezért

$$\partial_x^2 v(x,y) = 2u + 4x\partial_x u(x,y) + (x^2+y^2)\partial_x^2 u(x,y) \quad \partial_y^2 v(x,y) = 2u + 4y\partial_y u(x,y) + (x^2+y^2)\partial_y^2 u(x,y)$$

és így $\Delta u = 0$ figyelembe vételével

$$\Delta v(x,y) = 4u(x,y) + 4x\partial_x u(x,y) + 4y\partial_y u(x,y).$$

Ebből következően, ismét $\Delta u = 0$ felhasználásával,

$$\Delta^2 v(x,y) = \Delta(4x\partial_x u(x,y) + 4y\partial_y u(x,y)).$$

A fentiekhez hasonló egyszerű számolással nyerjük, hogy

$$\partial_x^2(4x\partial_x u(x,y)) = 8\partial_x^2 u(x,y) + 4x\partial_x^2 u(x,y) + 4x\partial_x\partial_y^2 u(x,y) = 8\partial_x^2 u(x,y) + 4x\partial_x \Delta u(x,y) = 8\partial_x^2 u(x,y),$$

valamint

$$\partial_y^2(4y\partial_y u(x,y)) = 8\partial_y^2 u(x,y) + 4y\partial_y^2 u(x,y) + 4y\partial_y\partial_x^2 u(x,y) = 8\partial_y^2 u(x,y) + 4y\partial_y \Delta u(x,y) = 8\partial_y^2 u(x,y),$$

tehát

$$\Delta^2 v(x,y) = 8\Delta u(x,y) = 0.$$

Megjegyezzük, hogy a $\Delta^2 u = 0$ egyenlet az úgynevezett *biharmonikus egyenlet*, amely a rugalmasságtanban fordul elő. Ezt a rugalmasságtani modellt először Sophie Germain (1776–1831) írta fel (akiről kevéssé ismert rugalmasságtani munkássága, inkább számelméleti eredményeiről híres). Később Claude-Louis Navier (1785–1836) (aki hídépítő mérnök volt, és a Navier-Stokes-egyenleteket elsőként írta fel), majd Siméon-Denis Poisson (1781–1840), aztán Gustave Kirchhoff (1824–1887) és Lord Kelvin (1824–1907) fejlesztették tovább, ezért a modellt szokás (kissé hosszan) Germain-Navier-Poisson-Kirchhoff-Kelvin-modellnek is hívni.

*7. Adjuk meg a $\partial_x u \cdot \partial_y u = 0$ egyenlet $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldásait!

Megoldás. A feladat beadható, ezért a megoldást nem árulom el.