2. zh (A) feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2015. tavasz

1. Oldjuk meg a következő parabolikus Cauchy-feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = x^3 + t & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = 0 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

2. Legyen $h \in C^1(\mathbb{R})$ konvex függvény. Igazoljuk, hogy ekkor a

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = 0 & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t u(0,x) = h(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

hiperbolikus Cauchy-feladat u megoldására minden rögzített $t > 0$ esetén $x \mapsto u(t,x)$ is konvex függvény.

3. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, továbbá $p \in C^1(\overline{\Omega})$, amelyre $p(x) \geq m > 0$ minden $x \in \overline{\Omega}$ esetén. Definiáljuk az $L\colon L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ operátort a következőképpen:

$$D(L) := \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})\colon u|_{\partial\Omega} + \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0,\ Lu \in L^2(\Omega)\}, \quad Lu := -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u).$$

Igazoljuk, hogy ekkor az $L\colon L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ operátor szimmetrikus, azaz $\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)}$ minden $u, v \in D(L)$ esetén, továbbá L szigorúan pozitív, azaz $\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} > 0$ minden $u \in D(L)$, $u \not\equiv 0$ esetén.

4. Legyen $\Omega := B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$, ahol $B_R(0)$ jelöli az origó középpontú R sugarú nyílt körlapot a síkon. Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén van az alábbi peremérték-feladatnak $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása? Adjuk meg a megoldásokat!

$$\begin{cases} \Delta u = \alpha & \Omega\text{-ban}, \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 1. \end{cases}$$

5. Legyen $\Omega = \{x^2 - x + y^2 < 2\} \subset \mathbb{R}^2$ és oldjuk meg a következő elliptikus peremérték-feladatot!

$$\begin{cases} \Delta u = 6x + 8y & \Omega\text{-ban}, \\ u|_{\partial\Omega} = x^3. \end{cases}$$

6. Oldjuk meg a következő parabolikus vegyes feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = \sin x \cos x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = \sin 2x & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

7. Legyen $a > 0$, és határozzuk meg a következő operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

$$D(L) := \{u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) : u(0) = 0,\ u'(a) = 0\}, \quad Lu := -u'' + u$$