1. zh (B) feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2015. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!
$$\begin{cases} \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 2 \\ u(x,x) = \sin 2x + 5x^2 \\ u(x,-x) = \sin 2x - 7x^2 \end{cases}$$
(Segítség: keressük u-t $u(x,y) = v(x,y) + x^2$ alakban...)

2. Mutassuk meg, hogy ha az $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ függvényre $u \geq 0$ és $\Delta u \geq 0$, akkor tetszőleges $F \in C^2(\mathbb{R})$ monoton növő konvex függvény esetén $\Delta(F(u^2)) \geq 0$.

3. Adjuk meg az $y^2 \partial_x u(x,y) + x^2 \partial_y u(x,y) = x^2 y^2$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amely az $x + y = 0$ egyenesen azonosan 0.

4. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{yx} u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $y = x^2$ egyenletű parabola fölötti tartományban elliptikus, a parabola alatt pedig hiperbolikus legyen.

5. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ adott függvény. Konvergensek-e az alábbi (φ_j) függvénysorozatok a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ térben? Ha igen, adjuk is meg a határértéküket!
   a) $\varphi_j(x) := \varphi(x - j) \quad (x \in \mathbb{R}, j = 1, 2 \dots)$
   b) $\varphi_j(x) := \varphi\left(x - \frac{1}{j}\right) \quad (x \in \mathbb{R}, j = 1, 2 \dots)$

6. Értelmezzük az $u \colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:
$$u(\varphi) := \int_0^\infty y\varphi(1,y)\,dy \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)).$$
Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$! Számítsuk ki a $\partial_2^2 u$ disztribúciót!

7. Legyen $g_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\varepsilon(x) := \dfrac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}$. Mutassuk meg, hogy $\varepsilon \to 0+$ esetén $T_{g_\varepsilon} \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R})} \delta_0$ (azaz minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényre $T_{g_\varepsilon}(\varphi) \to \varphi(0)$).

1. zh (B) feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2015. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!
$$\begin{cases} \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 2 \\ u(x,x) = \sin 2x + 5x^2 \\ u(x,-x) = \sin 2x - 7x^2 \end{cases}$$
(Segítség: keressük u-t $u(x,y) = v(x,y) + x^2$ alakban...)

2. Mutassuk meg, hogy ha az $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ függvényre $u \geq 0$ és $\Delta u \geq 0$, akkor tetszőleges $F \in C^2(\mathbb{R})$ monoton növő konvex függvény esetén $\Delta(F(u^2)) \geq 0$.

3. Adjuk meg az $y^2 \partial_x u(x,y) + x^2 \partial_y u(x,y) = x^2 y^2$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amely az $x + y = 0$ egyenesen azonosan 0.

4. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{yx} u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $y = x^2$ egyenletű parabola fölötti tartományban elliptikus, a parabola alatt pedig hiperbolikus legyen.

5. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ adott függvény. Konvergensek-e az alábbi (φ_j) függvénysorozatok a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ térben? Ha igen, adjuk is meg a határértéküket!
   a) $\varphi_j(x) := \varphi(x - j) \quad (x \in \mathbb{R}, j = 1, 2 \dots)$
   b) $\varphi_j(x) := \varphi\left(x - \frac{1}{j}\right) \quad (x \in \mathbb{R}, j = 1, 2 \dots)$

6. Értelmezzük az $u \colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:
$$u(\varphi) := \int_0^\infty y\varphi(1,y)\,dy \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)).$$
Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$! Számítsuk ki a $\partial_2^2 u$ disztribúciót!

7. Legyen $g_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\varepsilon(x) := \dfrac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}$. Mutassuk meg, hogy $\varepsilon \to 0+$ esetén $T_{g_\varepsilon} \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R})} \delta_0$ (azaz minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényre $T_{g_\varepsilon}(\varphi) \to \varphi(0)$).