1. zh (A) feladatsor

III. éves alkmat parcdiff 2015. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{cases} \partial_{xy} u(x,y) = 0, \\ u(x+y, x-y) = x^2 + y^2. \end{cases}$$

2. Adjuk meg az összes $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\Delta u = 0$ és $\Delta u^2 = 0$.

3. Adjuk meg az $y\partial_x u(x,y) + x^2 \partial_y u(x,y) = x^2$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amely az x tengelyen a $(-x^3)$ függvénnyel egyezik meg.

4. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{xy} u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $y = 1$ és $y = -2$ egyenletű egyenesek közötti nyílt sávban elliptikus, az $y > 1$ és $y < -2$ nyílt félsíkokban pedig hiperbolikus legyen.

5. Rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény mellett legyen $\varphi_j(x) = \frac{1}{j!}\varphi(j - jx)$ $(x \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots)$. Konvergens-e a (φ_j) függvénysorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ térben? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát!

6. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ a $(0,0)$, $(-1,0)$ és $(-1,1)$ pontok által meghatározott nyílt háromszöglap a síkon. Értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(H) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:

$$u(\varphi) := \int_{-1}^{0} \int_{0}^{-x} \varphi(x,y)\, dy\, dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(H)).$$

Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(H)$! Mutassuk meg, hogy $\partial_1 u + \partial_2 u = 0$!

7. Legyen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$. Van-e olyan $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ disztribúció, amelyre $u' + g = \delta_1$?

1. zh (A) feladatsor

III. éves alkmat parcdiff 2015. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{cases} \partial_{xy} u(x,y) = 0, \\ u(x+y, x-y) = x^2 + y^2. \end{cases}$$

2. Adjuk meg az összes $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\Delta u = 0$ és $\Delta u^2 = 0$.

3. Adjuk meg az $y\partial_x u(x,y) + x^2 \partial_y u(x,y) = x^2$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amely az x tengelyen a $(-x^3)$ függvénnyel egyezik meg.

4. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{xy} u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $y = 1$ és $y = -2$ egyenletű egyenesek közötti nyílt sávban elliptikus, az $y > 1$ és $y < -2$ nyílt félsíkokban pedig hiperbolikus legyen.

5. Rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény mellett legyen $\varphi_j(x) = \frac{1}{j!}\varphi(j - jx)$ $(x \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots)$. Konvergens-e a (φ_j) függvénysorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ térben? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát!

6. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ a $(0,0)$, $(-1,0)$ és $(-1,1)$ pontok által meghatározott nyílt háromszöglap a síkon. Értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(H) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:

$$u(\varphi) := \int_{-1}^{0} \int_{0}^{-x} \varphi(x,y)\, dy\, dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(H)).$$

Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(H)$! Mutassuk meg, hogy $\partial_1 u + \partial_2 u = 0$!

7. Legyen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$. Van-e olyan $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ disztribúció, amelyre $u' + g = \delta_1$?