

2. feladatsor

Alkmat/Mat MSc parcdiff 2016. ősz

1. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, továbbá $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ és $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^m)$. Hogyan hatnak a $\delta_a \times \delta_b \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$, $\delta_a \times T_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ és $T_f \times \delta_b \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ disztribúciók egy $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ függvényre?

2. Legyenek $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ disztribúciók, továbbá $\alpha \in \mathbb{N}^n$ és $\beta \in \mathbb{N}^m$ multiindexek. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\partial^{(\alpha, \beta)}(u \times v) = (\partial^\alpha u) \times (\partial^\beta v).$$

3. Adjunk meg olyan $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ disztribúciókat, amelyekre

a) $u \times v = T_{\chi_{[0,1]^2}}$, ahol $\chi_{[0,1]^2}$ az egységnégyzet karakterisztikus függvénye;

b) $(u \times v)(\varphi) = \partial_{12}\varphi(1, 1)$ minden $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén;

c) $(u \times v)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \partial_2 \varphi(x, 1) dx$ minden $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén.

4. Legyen $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Igazoljuk, hogy

$$\text{supp}(u \times v) = \text{supp } u \times \text{supp } v.$$

5. Adjunk meg olyan $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúciót, amelyre $\text{supp } u = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ és

a) u előáll $u_1 \times u_2$ alakban, ahol $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

b) u nem áll elő $u_1 \times u_2$ alakban, ahol $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

6. Igaz-e, hogy ha az $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ disztribúciók előállnak mint egy $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ -beli és egy $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ -beli disztribúció direkt szorzata, akkor az $u + v$ disztribúció is előáll direkt szorzat alakban?

7. Tegyük fel, hogy az $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ disztribúciókra $u \times v = 0$. Következik-e ebből, hogy $u = 0$ vagy $v = 0$?