Parciális differenciálegyenletek

Mat/alkmat BSc, 2015. tavasz

Vizsgaidőpontok. Május 27. (D. 0-805), június 9. (D. 0.805), június 18. (É. 0.83). A vizsgák 9-kor kezdődnek és 120 perc áll rendelkezésre. Konzultációt szívesen tartok, az időpontot emailben célszerű egyeztetni, de rövidebb kérdésekre emailben is tudok válaszolni.

Tudnivalók. Az adott vizsgaidőpontra a Neptunban jelentkezni kell, enélkül nem lehet vizsgázni. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható, kivéve a vizsgafeladatsoron szereplő képletgyűjtemény. Üres lap viszont legyen mindenkinél. A vizsga két fő részből áll: 15 rövid és 3 hosszabb kérdés (de időben nem lesz kettéválasztva, mindenki úgy osztja be az idejét, ahogy neki kényelmes). A 15 rövid kérdés egy-egy definíció, vagy tétel kimondását kéri (olyanokat, amelyek a félév során számtalanszor előkerültek). Hibátlan válaszért 1 pont, kissé hiányosért 0,5 pont, nagyon hiányos vagy hibás válaszért 0 pont kapható. A legalább elégséges jegyért ebből a részből minimum 12 pontot kell elérni. Ha ez nincs meg, akkor a vizsga jegye elégtelen, függetlenül a további kérdésekre adott válaszoktól. A 3 hosszabb kérdés közül az első egy szűkebb témakörrel kapcsolatos fogalmak, példák, tételek kimondását kéri, a második egy rövid bizonyítást, a harmadik pedig egy hosszabb bizonyítást (mindkettő a tematikában „biz” szóval megjelöltek közül kerül ki). A közepesért nem kell bizonyítani, elegendő a fogalmak és tételek pontos kimondása. A jó jegyért legalább egy bizonyítást tudni kell, a jelesért pedig mindkettőt. A bizonyításokban apróbb, a lényeget nem befolyásoló hibák, elírások megengedettek.

Részletes vizsgatematika.

1. **Parciális differenciálegyenletek alapfogalmai, típusai, fizikai példák.**
   - multiindex, PDE „fogalma”, főbb típusai, mellékfeltételek, korrekt kitűzésű feladat, Hadamard példája, hullámegyenlet és hővezetési egyenlet fizikai és mellékfeltételeik, egyéb példák PDE-kre.
2. **Másodrendű lineáris egyenletek kanonikus alakja.**
   - másodrendű főrészükben lineáris egyenletek osztályozása (elliptikus, hiperbolikus, parabolikus), másodrendű lineáris állandó együtthatós egyenletek kanonikus alakja a különböző típusok esetén.
3. **A $C_0^\infty(\Omega)$ függvényosztály.**
   - $C^k(\Omega)$, tartó, $C_0^\infty(\Omega)$, példa, egységapproximáció, $f * \eta_\varepsilon$ különböző konvergenciái $\varepsilon \to 0$ esetén (biz.), következmények: $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű $L^p(\Omega)$-ban (nem biz.), a konstans 1 függvény $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-beli kiterjesztése kompakt halmazról, egységosztás tétele.
4. **Disztribúciók alapfogalmai, tulajdonságai.**
   - konvergencia $C_0^\infty(\Omega)$-ban, disztribúció fogalma, példák (reguláris, Dirac-delta), reguláris disztribúciót m.m. egyértelműen meghatározza melyik $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvényhez tartozik, a folytonosság ekvivalens jellemzése (biz.).
5. **Műveletek disztribúciókkal, disztribúciók deriválása.**
   - műveletek disztribúciókkal (algebrai műveletek, sima függvénnyel való szorzás), disztribúciók tartója, példák (Dirac-delta és reguláris disztribúció tartója), $C^k(\mathbb{R}^n)$-beli függvény deriváltjához tartozó reguláris disztribúció (biz.), derivált definíciója és $\partial^\alpha u$ folytonossága, példák: Heaviside-függvény (biz.), szakaszonként folytonosan differenciálható függvény deriváltja, hullámegyenlet alapmegoldása egydimenzióban.
6. **Disztribúciók direkt szorzata.**

- függvények direkt szorzata, direkt szorzathoz tartozó reguláris disztribúció (biz.), direkt szorzat definíciója disztribúciók esetében, a definíció jogossága: tétel az $A\psi := v(y \mapsto \psi(x,y))$ operátorról, műveleti tulajdonságok: felcserélés (biz.), linearitás, derivált, tartó.

7. **Disztribúciók konvolúciója.**

   - függvények konvolúciója, elégséges feltételek a konvolúció létezéséhez, függvények konvolúciójához tartozó reguláris disztribúció, csonkító függvények és konvergenciájuk, a konvolúció definíciója disztribúciók esetében, műveleti tulajdonságok, kommutativitás, derivált, Dirac-deltával vett konvolúció.

8. **Alapmegoldások.**

   - állandó együtthatós lineáris egyenletek alapmegoldásának definíciója, az egyenlet megoldása tetszőleges jobb oldal esetén (biz.), a megoldás egyértelműsége (biz.), példák: közönséges differenciálegyenlet alapmegoldása, hővezetési egyenlet alapmegoldása tetszőleges dimenzióban, hullámegyenlet alapmegoldása egydimenzióban.

9. **Hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok.**

   - klasszikus Cauchy-feladat értelmezése, klasszikus alak átírása disztribúciós alakká (biz.), általánosított Cauchy-feladat értelmezése, klasszikus megoldás létezése és egyértelműsége, D'Alembert-formula, a formula következményei (véges sebességű hullámterjedés, függőségi kúp).

10. **Hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok.**

    - klasszikus Cauchy-feladat értelmezése, klasszikus alak átírása disztribúciós alakká, $\mathcal{M}$ függvényosztály és konvolúció, $\widetilde{\mathcal{M}}$ osztály és konvolúció, klasszikus megoldás létezése és egyértelműsége bizonyos feltételek mellett, végtelen sebességű hőterjedés, nem egyértelműség, ha nincs növekedési feltétel.

11. **Peremérték-feladatok elliptikus egyenletekre.**

    - klasszikus peremérték-feladatok a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátorra, Gauss–Osztrogradszkij-tétel skalár és vektor alak, Green-formulák (biz.), a klasszikus harmadik peremérték-feladat megoldásának egyértelműsége (biz.), klasszikus sajátérték-feladatok és sajátértékek értelmezése, sajátértékek előjele.

12. **Poisson-egyenlet és Green-függvények.**

    - a Poisson-egyenlet alapmegoldása, Green-függvény értelmezése és tulajdonságai (biz. csak a két könnyű), Green reprezentációs tétele (biz.), féltér Green-függvénye és normális irányú deriváltja (biz.), féltérre vonatkozó Poisson-formula, gömbre vonatkozó inverzió, gömbre vonatkozó Poisson-formula.

13. **Szoboljev-terek.**

    - a $H^k(\Omega)$ tér definíciója, a $H^k(\Omega)$-beli függvények ekvivalens jellemzése (biz.), a $H_0^k(\Omega)$ tér, a $H^k(\Omega)$ és $H_0^k(\Omega)$ terek alaptulajdonságai, ekvivalens norma $H_0^1(\Omega)$-ban (biz.), $H^1(\Omega)$ kompakt beágyazása $L^2(\Omega)$-ba, a nyom operátor értelmezése (biz.), $H^1(\Omega)$-beli függvények nyoma $\partial\Omega$-n.

14. **Peremérték-feladatok gyenge megoldása.**

    - az első peremérték-feladat klasszikus megoldása, a gyenge alak értelmezése, gyenge megoldás, létezés és egyértelműség (biz.).