Parciális differenciálegyenletek előadás
Matematika BSc III/2
2014/2015. tavasz
Hol tartunk?

Ennek a előadásvázlatnak a célja, hogy címszavakban összefoglalja és átláthatóbbá tegye az adott heti előadásokon elhangzott anyagot.

1. előadás (február 9.)

- **Tájékoztató a félévről.**
- **Alapfogalmak:** jelölések ($\partial_j, \partial_j\partial_k, \partial_j^2, \partial_t, \partial_x, \dots$), multiindex $= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, abszolútértéke = deriválás rendje, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, PDE „fogalma”, klasszikus megoldás, rend, főbb egyenlettípusok (kvázilineáris, szemilineáris, lineáris), mellékfeltételek (perem, kezdeti, vegyes), korrekt kitűzésű feladat, Hadamard példája nem korrekt kitűzésű feladatra;
- **Fizikai példák:** hővezetési egyenlet egy- és többdimenzióban, hullámegyenlet egydimenzióban (húr rezgése), magasabb dimenziós hullámegyenletek.

2. előadás (február 16.)

- **Fizikai példák:** transzportegyenlet, biharmonikus egyenlet, PDE rendszerek (Maxwell, Navier–Stokes);
- **Másodrendű főrészében lineáris egyenletek osztályozása:** általános alak, főrész, előzetes feltevés ($a_{jk} = a_{kj}$), együtthatómátrix, sajátértékek előjele, elliptikus, hiperbolikus, parabolikus egyenlet, példák (hullámegyenlet, hővezetési egyenlet, Laplace-egyenlet);
- **Másodrendű főrészében lineáris egyenletek kanonikus alakja állandó együtthatós esetben:** a főrész transzformációjának ötlete (főtengelytétel, új változó bevezetése), kanonikus alak elliptikus/hiperbolikus/parabolikus esetben;
- **Másodrendű lineáris egyenletek kanonikus alakja állandó együtthatós esetben:** az alacsonyabb rendű tagok transzformációjának ötletet (új függvény bevezetése exponenciális szorzó segítségével), kanonikus alak a három speciális esetben;
- **A $C_0^\infty(\Omega)$ függvényosztály:** jelölések ($C^k(\Omega), k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ esetbekben); tartó (support), kompakt tartójú függvények, $C_0^\infty(\Omega)$, példa, η, η_ε és tulajdonságai, egységapproximáció.

3. előadás (február 23.)

- **A $C_0^\infty(\Omega)$ függvényosztály:** az approximációs tétel (biz.), $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű $L^p(\Omega)$-ban $1 \le p < \infty$ esetén (nem biz.), kompakt halmazon 1-gyel egyenlő kompakt tartójú sima függvény konstruálása (nem biz., csak ötlet), egységosztás tétele (nem biz.);
- **Disztribúcióelmélet:** motiváció (Dirac-delta értelme micsoda?, függvényeknek funkcionálokat fogunk megfeleltetni).

4. előadás (március 2.)

- **Disztribúcióelmélet:** $\mathscr{D}(\Omega)$, disztribúció definíciója (sorozatfolytonosság), példák ($f \in L^1_{\text{loc}}$ esetén T_f reguláris disztribúció, δ_a Dirac-delta), a folytonosság ekvivalens megfogalmazásas (biz.), alkalmazás T_f folytonosságának igazolására, reguláris disztribúció egyértelműen meghatározza melyik lokálisan integrálható függvényhez tartozik (nem biz.);

- **Algebrai műveletek disztribúciókkal:** összeadás, számmal szorzás, $\mathscr{D}'(\Omega)$ vektortér, sima függvénnyel szorzás, $\psi T_f = T_{\psi f}$;

- **Disztribúciók differenciálása:** motiváció ($\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$ legyen), $T_{\partial^\alpha f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(\partial^\alpha \varphi)$ (biz.), $\partial^\alpha u$ definíciója, $\partial^\alpha u$ továbbra is disztribúció (biz.), példa ($H' = \delta_0$).

5. előadás (március 9.)

- **Disztribúciók differenciálása:** példák (Heaviside-függvény, szakaszonként folytonosan differenciálható ugrófüggvény deriváltja, egydimenziós hullámegyenlet alapmegoldása, n-dimenziós hővezetési egyenlet alapmegoldása alapmegoldása), hogyan tovább? (cél: $Lu = f$, ehhez alapmegoldás, konvolúció, amihez direkt szorzat);

- **Disztribúciók direkt szorzata:** függvények direkt szorzata, $T_{f\times g}$ megadása, $u \times v$ definíciója, a definíció értelmessége (nem biz.), a direkt szorzat tulajdonságai, u és v felcserélhetősége (biz.), linearitás (biz.), differenciálás (nem biz.);

- **Disztribúciók tartója:** tartó definíciója, $u = 0$ egy nyílt halmazon mit jelent?

6. előadás (március 16.)

- **Disztribúciók tartója:** példák (Dirac-delta és reguláris disztribúció tartója).

- **Disztribúciók konvolúciója:** függvények konvolúciója, elégséges feltételek a konvolúció létezésére, T_{f*g} megadása, baj: $\varphi(y+z)$ nem kompakt tartójú, ötlet: csonkítás, csonkító függvények konvergenciája $\mathbb{R}^{2n}$-ben ($\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$), $T_{f*g} = \lim_{k\to\infty} T_f \times T_g\big((y,z) \mapsto \varphi(y+z)\zeta_k(y,z)\big)$, $u * v$ definíciója (mikor értelmes), a konvolúció tulajdonságai, linearitás (biz.), kommutativitás (nbiz.), differenciálás (nem biz.), Dirac-deltával vett konvolúció (nem biz.);

- **Alapmegoldások:** állandó együtthatós lineáris differenciáloperátor alakja, alapmegoldás definíciója, $Lu = F$ megoldása az alapmegoldás segítségével, egyértelműsége (biz.).

7. előadás (március 23.)

- **Alapmegoldások:** példák (közdiff., hullámegyenlet egy-, két- és háromdimenzióban, hővezetési egyenlet n-dimenzióban);

- **Hullámegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok:** a klasszikus feladat, klasszikus megoldás, jel $\mathbb{R}^{n+1}_+$, cél: formula a megoldásra, hogyan? (először általánosított megoldás az alapmegoldás és konvolúció segítségével), a klasszikus Cauchy-feladat megoldása disztribúció értelemben eleget tesz a hullámegyenletnek $F = T_{\tilde{f}} + \delta_0' \times T_g + \delta_0 \times T_h$ jobb oldal esetén (biz.), az általánosított Cauchy-feladat értelmezése, a klasszikus Cauchy-feldatnak legfeljebb egy megoldása van, d'Alembert-formula (nem biz.), mese a véges sebességű hullámterjedésről.

8. előadás (március 30.)

- **Hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatok:** a klasszikus feladat értelmezése, a klasszikus megoldás disztribúció értelemben eleget tesz a hővezetési egyenletnek $F = T_{\tilde{f}} + \delta_0 \times T_g$ jobb oldallal, az általánosított Cauchy-feladat értelmezése, a hővezetési egyenlet alapmegoldása, baj: $E * F$ általában nem létezik, keressünk olyan disztribúcióosztályt, amelyben létezik, az $\mathscr{M}$ függvényosztály, $\tilde{\mathscr{M}}$ disztribúcióosztály, ha $F \in \tilde{\mathscr{M}}$, akkor $E * F$ disztribúció értelemben létezik és $E * F \in \tilde{\mathscr{M}}$ (nem biz.), a klasszikus Cauchy-feladat megoldásának létezése (nem biz.), végtelen hőterjedés, nem egyértelműség, ha nincs növekedési feltétel (nem biz.).

- **Peremérték-feladatok:** divergencia, gradiens, Δ, $Lu = -\mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\, u)$, különböző peremfeltételek (Dirichlet, Neumann, harmadik).

9. előadás (április 13.)

- **Peremérték-feladatok:** Gauss–Osztrogradszki tétel (skalár és vektoralak, nem biz.), Green első formulája (biz.), Green második formulája (biz.), a harmadik peremérték-feladat megoldásának egyértelműsége (biz.), következmények az első és második peremérték-feladatra nézve (biz.), klasszikus sajátértékek, klasszikus sajátérték-feladatok, a sajátértékek előjele (biz.).
- **Poisson-egyenlet alapmegoldása:** az alapmegoldás (nem biz.);
- **Green-függvények:** Green-függvény értelmezése, a Green-függvény három tulajdonsága (kimondás).

10. előadás (április 20.)

- **Green-függvények:** a Green-függvények három tulajdonsága (biz. csak a két könnyű), Green reprezentációs tétele (biz.), féltér Green-függvénye és normális irányú deriváltja (biz.), féltérre vonatkozó Poisson-formula (nem biz.), inverzió, gömb Green-függvénye (nem biz.), gömbre vonatkozó Poisson-formula (nem biz.).

11. előadás (április 27.)

- **Szoboljev-terek:** a $H^k(\Omega)$ tér értelmezése, hogyan jellemezhetők a térben a függvények?, a $H_0^k(\Omega)$ tér, alaptulajdonságok, ekvivalens norma $H_0^1(\Omega)$-ban (biz.), $H^1(\Omega)$ kompakt beágyazása $L^2(\Omega)$-ba, a nyom operátor motivációja.

12. előadás (május 4.)

- **Szoboljev-terek:** a nyom operátor folytonossága a $C^1(\overline{\Omega})$ altére (biz.), kiterjesztés. Rövid összefoglalás aról, mit érdemes tudni a $H^1(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)$ terekről.
- **Peremérték-feladatok gyenge megoldásai:** a $-\mathrm{div}(p \,\mathrm{grad}\, u) + qu$ operátorra vonatkozó első peremérték-feladat gyenge alakjának értelmezése, kapcsolat a klasszikus és gyenge megoldások között.

13. előadás (május 11.)

- **Peremérték-feladatok gyenge megoldásai:** a $-\mathrm{div}(p \,\mathrm{grad}\, u) + qu$ operátorra vonatkozó első peremérték-feladat gyenge megoldásának létezése, egyértelműsége és folytonos függése homogén Dirichlet-peremfeltétel esetén (biz.), az inhomogén peremfeltétel esete hogyan kezelhető, tétel a gyenge megoldás létezéséről az inhomogén peremfeltétel esetén.