Parciális differenciálegyenletek, 2015. tavasz, Minta vizsga

Tudnivalók. A rövid kérdések mindegyike 1 pontot ér. Hibátlan válaszért 1 pont jár, apró hibát tartalmazó válaszért 0,5 pont, nagyon hiányos, vagy hibás válaszért 0 pont. A legalább elégséges jegyhez 12 pontot kell elérni. Ha ez megvan, akkor a vizsga jegye legalább elégséges, függetlenül a további kérdésekre adott válaszoktól. Ha a 12 pont nincs meg, akkor a vizsga elégtelen, függetlenül a többi kérdésre adott válaszoktól. A közepesért a hosszabb kérdésekből elég a definíciók és tételek pontos kimondása. A jó jegyért legalább az egyik, a jelesért mindkét bizonyítást kell tudni (apró hibák, amelyek a bizonyítás lényegét nem befolyásolják, megengedettek).

Rövid kérdések.

1. Definiálja a multiindex fogalmát és írja fel a ∂^α deriváltat parciális deriváltak segítségével!
2. Mit jelent az, hogy a $\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)\partial_j\partial_k u(x) = f(x)$ egyenlet parabolikus egy pontban?
3. Definiálja egy $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvény tartójának fogalmát!
4. Definiálja a $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergencia fogalmát!
5. Definiálja disztribúció deriváltjának fogalmát!
6. Definiálja disztribúciók direkt szorzatának fogalmát!
7. Definiálja a csonkító függvénysorozat fogalmát!
8. Definiálja, hogy mit jelent az, hogy két disztribúció konvolúciója létezik!
9. Definiálja az alapmegoldás fogalmát!
10. Definiálja a hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot!
11. Definiálja a Neumann-féle peremfeltételt!
12. Mondja ki Green első formuláját az $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátorra!
13. Írja fel egy $u \in H^1(\Omega)$ függvény normáját!
14. Mondja ki a Szoboljev-tereknél tanult kompakt beágyazási tételt és fogalmazza meg sorozatokkal, hogy ez mit jelent!
15. Definiálja a gyenge megoldás fogalmát az $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátorra!

Parciális differenciálegyenletek, 2015. tavasz, Minta vizsga

Tudnivalók.A rövid kérdések mindegyike 1 pontot ér. Hibátlan válaszért 1 pont jár, apró hibát tartalmazó válaszért 0,5 pont, nagyon hiányos, vagy hibás válaszért 0 pont. A legalább elégséges jegyhez 12 pontot kell elérni. Ha ez megvan, akkor a vizsga jegye legalább elégséges, függetlenül a további kérdésekre adott válaszoktól. Ha a 12 pont nincs meg, akkor a vizsga elégtelen, függetlenül a többi kérdésre adott válaszoktól. A közepesért a hosszabb kérdésekből elég a definíciók és tételek pontos kimondása. A jó jegyért legalább az egyik, a jelesért mindkét bizonyítást kell tudni (apró hibák, amelyek a bizonyítás lényegét nem befolyásolják, megengedettek).

Rövid kérdések.

1. Definiálja a multiindex fogalmát és írja fel a ∂^α deriváltat parciális deriváltak segítségével!
2. Mit jelent az, hogy a $\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)\partial_j\partial_k u(x) = f(x)$ egyenlet parabolikus egy pontban?
3. Definiálja egy $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvény tartójának fogalmát!
4. Definiálja a $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergencia fogalmát!
5. Definiálja disztribúció deriváltjának fogalmát!
6. Definiálja disztribúciók direkt szorzatának fogalmát!
7. Definiálja a csonkító függvénysorozat fogalmát!
8. Definiálja, hogy mit jelent az, hogy két disztribúció konvolúciója létezik!
9. Definiálja az alapmegoldás fogalmát!
10. Definiálja a hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot!
11. Definiálja a Neumann-féle peremfeltételt!
12. Mondja ki Green első formuláját az $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátorra!
13. Írja fel egy $u \in H^1(\Omega)$ függvény normáját!
14. Mondja ki a Szoboljev-tereknél tanult kompakt beágyazási tételt és fogalmazza meg sorozatokkal, hogy ez mit jelent!
15. Definiálja a gyenge megoldás fogalmát az $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátorra!

Hosszabb kérdések.

1. Adjon meg egy konkrét függvényt, amely $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-ben van, majd írja le, hogyan kapunk ebből egységappoximációt (mollifier), és sorolja fel az egységapproximáció három fontos tulajdonságát! Mondja ki azt a tételt, amely az (f_ε) függvénycsalád különböző konvergenciáiról szól $\varepsilon \to 0+$ esetén! (Semmit se bizonyítson!)

2. Mondja ki és igazolja azt a tételt, amely egy disztribúció értelemben vett $Lu = F$ egyenlet megoldásainak alakjáról és azok egyértelműségéről szól, ha ismerjük az alapmegoldást!

3. Mondja ki és bizonyítsa be az $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátorra vonatkozó harmadik peremérték-feladat egyértelmű megoldhatóságáról szóló tételt!

Képletgyűjtemény.

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) f(\tau,\xi)\, d\xi\, d\tau + \\ + \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) g(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\tau\, d\xi + \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{2x_n}{R\omega_n} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y$$

$$\frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{ha } t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t\le 0, x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{ha } n=2, x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\cdot\dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{ha } n\ge 3, x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}. \end{cases}$$

Hosszabb kérdések.

1. Adjon meg egy konkrét függvényt, amely $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-ben van, majd írja le, hogyan kapunk ebből egységappoximációt (mollifier), és sorolja fel az egységapproximáció három fontos tulajdonságát! Mondja ki azt a tételt, amely az (f_ε) függvénycsalád különböző konvergenciáiról szól $\varepsilon \to 0+$ esetén! (Semmit se bizonyítson!)

2. Mondja ki és igazolja azt a tételt, amely egy disztribúció értelemben vett $Lu = F$ egyenlet megoldásainak alakjáról és azok egyértelműségéről szól, ha ismerjük az alapmegoldást!

3. Mondja ki és bizonyítsa be az $Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátorra vonatkozó harmadik peremérték-feladat egyértelmű megoldhatóságáról szóló tételt!

Képletgyűjtemény.

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) f(\tau,\xi)\, d\xi\, d\tau + \\ + \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) g(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\tau\, d\xi + \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\, d\xi$$

$$\frac{2x_n}{R\omega_n} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y$$

$$\frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{ha } t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t\le 0, x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{ha } n=2, x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\cdot\dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{ha } n\ge 3, x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}. \end{cases}$$