A 9. feladatsor megoldása
III. éves alkmat parcdiff 2015. tavasz

1. Legyen $a > 0$, és határozzuk meg a következő operátorok sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

a) $D(L) = \{u \in C^2(0,a) \cap C([0,a]) : u(0) = u(a) = 0\}, \quad Lu = -u''$,

b) $D(L) = \{u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) : u'(0) = u'(a) = 0\}, \quad Lu = -u''$.

Megoldás. a) Keressük azokat a $\lambda \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekhez létezik $u \in D(L), u \neq 0$ úgy, hogy $Lu = -\lambda u$, azaz $-u'' = \lambda u$. Ehhez hozzávéve az operátor értelmezési tartományában szereplő kezdeti feltételt, az alábbi jól ismert egydimenziós peremérték-feladatot kapjuk:

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0,a)) \\ u(0) = 0 \\ u(a) = 0. \end{cases}$$

A differenciálegyenlet megoldása λ előjelétől függően (lásd még az 1. feladatsor 4. feladatát is)

$$u(x) = \begin{cases} c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2\cos\sqrt{\lambda}x, & \text{ha } \lambda > 0, \\ c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x}, & \text{ha } \lambda < 0, \\ c_1 x + c_2, & \text{ha } \lambda = 0. \end{cases} \tag{1}$$

(Valójában a fenti függvények között, a látszat ellenére, szoros kapcsolat van: mindegyik az $\alpha e^{\sqrt{-\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ függvényből származik, ahol α, β komplex számok. Ha $\lambda < 0$, akkor visszakapjuk az exponenciális függvények lineáris kombinációját, amely valójában szinusz-hiperbolikusz és koszinusz-hiperbolikusz függvények lineáris kombinációja. A $\lambda > 0$ esetben a kitevőben tisztán képzetes szám áll, így ekkor a szinusz és koszinusz függvények lineáris kombinációját nyerjük. A $\lambda = 0$ eset $\lambda \to 0$ határátmenettel kapható. Ekkor nyerjük a konstans függvényeket, valamint az $\frac{1}{\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x})$ hányadosból (amely ugyancsak megoldás) $\lambda \to 0$ esetén adódó const $\cdot\, x$ függvényeket.) Vegyük most szemügyre a peremfeltételeket! A $\lambda = 0$ esetben $u(0) = 0$ miatt $c_2 = 0$, így $u(a) = 0$ folytán $c_1 a = 0$, azaz $c_1 = 0$, tehát $u \equiv 0$. A $\lambda < 0$ esetben $u(0) = 0$ miatt $c_1 + c_2 = 0$, így $u(a) = 0$ folytán $c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}a} - c_1 e^{-\sqrt{|\lambda|}a} = 0$, ezért $c_1 = 0$, tehát $u \equiv 0$. Marad a $\lambda > 0$ eset. Ekkor $u(0) = 0$ miatt $c_2 \cos 0 = 0$, vagyis $c_2 = 0$. Másrészt $u(a) = 0$ folytán $\sin\sqrt{\lambda}a = 0$, következésképpen $\sqrt{\lambda}a = k\pi$, ahol k pozitív egész szám (hiszen a $\lambda > 0$ esetet vizsgáljuk). Ez azt jelenti, hogy $\lambda = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$, ekkor $u(x) = \sin\frac{k\pi}{a}x$, ahol k a pozitív(!) egész számok halmazát futja be, tehát a sajátértékek mind pozitívak és megszámlálhatóan végtelen sok sajátérték van. Jól ismert (például Fourier-analízisből), hogy a szinusz-rendszer ortogonális $L^2(0,a)$-ban, normáljuk le az előbb kapott u függvényeket, ekkor nyerjük az L operátor $L^2(0,a)$-ban teljes ortonormált sajátfüggvényrendszerét és a hozzá tartozó sajátértékrendszert:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \qquad u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{k\pi}{a}x \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Megjegyezzük, hogy a normálásnál felhasználtuk, hogy $\int_0^a \sin^2\frac{k\pi}{a}x\,dx = \frac{a}{2}$, amit például a következőképpen igazolhatunk. A kétszeres szög koszinuszára vonatkozó $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ összefüggés alapján $\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$ adódik. Ebből következően

$$\int_0^a \sin^2\frac{k\pi}{a}x\,dx = \int_0^a \frac{1-\cos\frac{2k\pi}{a}x}{2}\,dx = \frac{a}{2} - \frac{a}{4k\pi}\left[\sin\frac{2k\pi}{a}\right]_{x=0}^a = \frac{a}{2}.$$

b) Az előző ponthoz hasonlóan a sajátértékfeladat a következő jól ismert egydimenziós peremérték-feladatra vezethető vissza:

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0,a)) \\ u'(0) = 0 \\ u'(a) = 0. \end{cases}$$

A differenciálegyenlet λ előjelétől függő megoldásait az (1) táblázat tartalmazza. A peremfeltételeket figyelembe véve, $\lambda = 0$ esetén $c_1 = 0$ adódik, azaz $u \equiv c_2$. A $\lambda < 0$ esetben $u'(0) = 0$ miatt $\sqrt{|\lambda|}(c_1 - c_2) = 0$, azaz $c_1 = c_2$, így $u'(a) = 0$ folytán $\sqrt{|\lambda|}c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}a} - e^{-\sqrt{|\lambda|}a} = 0$, ezért $c_1 = 0$, tehát $u \equiv 0$. Végül a $\lambda > 0$ esetben $u'(0) = 0$ miatt $\sqrt{\lambda}c_1\cos 0 = 0$, így $c_1 = 0$. Másrészt $u'(a) = 0$ folytán $\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a = 0$, következésképpen $\sqrt{\lambda}a = k\pi$, ahol k pozitív egész szám (hiszen a $\lambda > 0$ esetet vizsgáljuk). Ekkor $u(x) = \cos\frac{k\pi}{a}x$, ahol $k = 0$ választással a $\lambda = 0$ esetben kapott konstans függvényeket nyerjük. A sajátértékek tehát nemnegatívak, és megszámlálhatóan végtelen sok sajátérték van (sőt, a 0 sajátérték egyszeres és a konstansfüggvények a hozzá tartozó sajátfüggvények). Jól ismert (megint Fourier-analízisből), hogy a koszinusz-rendszer ortogonális $L^2(0,a)$-ban, így az előbbi függvényeket lenormálva nyerjük az L operátor $L^2(0,a)$-ban teljes ortonormált sajátfüggvényrendszerét és a hozzá tartozó sajátértékrendszert:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \qquad u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}, \;\; u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{k\pi}{a}x \quad (k = 1, 2, \dots)$$

A normálásnál keletkező $\sqrt{\frac{2}{a}}$ szorzó a szinusz-rendszernél tárgyalt módon kapható meg.

2. Legyen $T = (0,a) \times (0,b) \subset \mathbb{R}^2$ $(a, b > 0)$, és határozzuk meg az alábbi operátorok sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

a) $D(L) = \{u \in C^2(T) \cap C(\overline{T}) : u|_{\partial T} = 0\}, \quad Lu = -\Delta u,$

b) $D(L) = \{u \in C^2(T) \cap C^1(\overline{T}) : \partial_\nu u|_{\partial T} = 0\}, \quad Lu = -\Delta u.$

Megoldás. a) A változók szétválasztásának módszerét használjuk, azaz a sajátfüggvényeket $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$ alakban keressük. Ekkor az $Lu = \lambda u$ sajátérték-egyenlet lényegében a következő differenciálegyenletet jelenti a T kétdimenziós intervallumon:

$$-v''(x)w(y) - v(x)w''(y) = \lambda v(x)w(y).$$

Feltételezve, hogy $v(x) \cdot w(y) \neq 0$, formális leosztás és rendezés után

$$-\frac{v''(x)}{v(x)} = \lambda + \frac{w''(y)}{w(y)}$$

adódik. Vegyük észre, hogy a fenti egyenlőség bal oldala csak x-től függ, a jobb oldal pedig csak y-tól. Mivel az egyenlőségnek minden $(x, y) \in T$ esetén teljesülnie kell, ezért ez csak úgy lehet, ha mindkét oldalon konstans függvény áll, azaz létezik $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $-\frac{v''(x)}{v(x)} = \alpha$, $-\frac{w''(y)}{w(y)} = \beta$ és $\alpha + \beta = \lambda$. Az operátor értelmezési tartományában lévő peremfeltételt felhasználva a $v(0) = v(a) = 0$, $w(0) = w(b) = 0$ homogén Dirichlet-peremfeltételeket nyerjük. Ez azt jelenti, hogy v sajátfüggvénye, α pedig sajátértéke az 1. feladat a) részében szereplő operátornak, tehát $\alpha = \alpha_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$ és $v(x) = v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{k\pi}{a} x$. Hasonlóan, w is sajátfüggvénye ugyanennek az operátornak $a = b$ választással, tehát $\beta = \beta_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2$ és $w(x) = w_k(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{k\pi}{b} y$. Ennek alapján az L operátornak megszámlálható sok sajátértéke van, ezek

$$\lambda_{k,l} = \pi^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right) \quad (k, l = 1, 2, \dots),$$

továbbá a megfelelő ($L^2(T)$-ben teljes) ortonormált sajátfüggvényrendszer

$$u_{k,l}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{l\pi}{b} y \quad (k, l = 1, 2, \dots).$$

Jegyezzük meg, hogy a levezetés során való osztásnál feltételeztük, hogy nem osztunk nullával, ezért a kapott megoldások helyességét még ellenőriznünk kell. Világos azonban, hogy a kapott függvények a T kétdimenziós intervallumban sehol sem egyenlők nullával, így érvényes a fenti levezetés.

Megjegyezzük, hogy a fentiekből még nem látszik, hogy más sajátértéke nincs az operátornak. Ez abból következik, hogy az elmélet alapján (lásd előadás) tudjuk, hogy a sajátfüggvények teljes ortogonális rendszert alkotnak, a fneti kapott rendszer már teljes, így nem tudjuk további független függvényekkel kiegészíteni.

b) Teljesen hasonló módon járunk el mint az előző részben. A változók szétválasztásának módszerét használva, $u(x, y) = v(x)w(y)$ alakban keressük a megoldást. Behelyettesítés, leosztás (feltételezve, hogy $v(x)w(y) \neq 0$) és rendezés után azt kapjuk, hogy

$$-\frac{v''(x)}{v(x)} = \lambda + \frac{w''(y)}{w(y)}.$$

A fenti összefüggésnek minden $(x, y) \in T$ esetén teljesülnie kell, ez csak úgy lehetséges, ha mindkét oldalon konstans függvény áll, azaz létezik $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $-\frac{v''(x)}{v(x)} = \alpha$, $-\frac{w''(y)}{w(y)} = \beta$ és $\alpha + \beta = \lambda$. Gondoljuk meg, hogy $\partial_\nu u|_{\partial T} = -v(x)w'(0)$ a $(0, a) \times \{0\}$ oldalon, $\partial_\nu u|_{\partial T} = v(x)w'(b)$ a $(0, a) \times \{b\}$ oldalon, $\partial_\nu u|_{\partial T} = -v'(0)w(y)$ a $\{0\} \times (0, b)$ oldalon és $\partial_\nu u|_{\partial T} = v'(a)w(y)$ az $\{a\} \times (0, b)$ oldalon. Ez (megint $v(x)w(y) \neq 0$ feltételezésével) azt jelenti, hogy $v'(0) = v'(a) = 0$ és $w'(0) = w'(b) = 0$. Azt kaptuk tehát, hogy a v függvény sajátfüggvénye, α pedig sajátértéke az 1. feladat b) részében szereplő L operátornak. Hasonlóan, w sajátfüggvénye, β pedig sajátértéke az L operátornak. Az 1. feladat b) része alapján $\alpha = \alpha_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$, $\beta = \beta_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2$, továbbá $v(x) = v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{k\pi}{a} x$, $w(x) = w_k(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \cos \frac{k\pi}{b} y$, ahol k, l a nemnegatív egész számok halmazát futja be. Végeredmémyben tehát az L operátor sajátértékrendszere és ($L^2(T)$-ben teljes) ortonormált sajátfüggvényrendszere:

$$\lambda_{k,l} = \pi^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right) \quad (k, l = 0, 1, \dots),$$

valamint

$$\begin{aligned}
u_{0,0}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{ab}}, \\
u_{k,0}(x, y) &= \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{k\pi}{a} x \quad (k = 1, 2 \dots), \\
u_{0,l}(x, y) &= \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{l\pi}{b} y \quad (k = 1, 2, \dots), \\
u_{k,l}(x, y) &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos \frac{k\pi}{a} x \cos \frac{l\pi}{b} y \quad (k, l = 1, 2 \dots).
\end{aligned}$$

Jegyezzük meg, hogy a levezetés során való osztásnál feltételeztük, hogy nem osztunk nullával, ezért a kapott megoldások helyességét még ellenőriznünk kell. Világos azonban, hogy a kapott függvények a T kétdimenziós intervallumban sehol sem egyenlők nullával, így érvényes a fenti levezetés.

Megjegyezzük, hogy a fentiekből még nem látszik, hogy más sajátértéke nincs az operátornak. Ez abból következik, hogy az elmélet alapján (lásd előadás) tudjuk, hogy a sajátfüggvények teljes ortogonális rendszert alkotnak, a fneti kapott rendszer már teljes, így nem tudjuk további független függvényekkel kiegészíteni.

3. Legyen $T = (0, \pi)^2$ és oldjuk meg a következő elliptikus peremérték-feladatokat!

a) $\begin{cases} -\Delta u = x + y \quad T\text{-ben}, \\ u|_{\partial T} = 0, \end{cases}$

b) $\begin{cases} -\Delta u = 3\sin x \sin 4y - 8 \sin 2x \sin 5y \quad T\text{-ben}, \\ u|_{\partial T} = 0, \end{cases}$

c) $\begin{cases} -\Delta u = \cos x \cos y \quad T\text{-ben}, \\ \partial_\nu u|_{\partial T} = 0. \end{cases}$

Megoldás. a) A megoldást az operátor $L^2(T)$-ben ortonormált sajátfüggvény-rendszerében állítjuk elő. Ehhez írjuk fel az f függvényt is ebben a rendszerben, $f = \sum_{k,l=1}^{\infty} c_{k,l} u_{k,l}$, ahol $u_{k,l}$ a 2. feladat a) részében szereplő függvényrendszer. A $c_{k,l}$ együtthatókat a következőképpen nyerjük:

$$c_{k,l} = \int_T f u_{k,l} = \int_0^\pi \int_0^\pi (x+y) \frac{2}{\pi} \sin kx \sin ly \, dx\, dy = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^\pi x \sin kx \, dx \int_0^\pi \sin ly \, dy + \int_0^\pi y \sin ly \, dy \int_0^\pi \sin kx \, dx \right] =$$
$$= \frac{4}{kl} \left((-1)^{k+1}(1-(-1)^l) + (-1)^{l+1}(1-(-1)^k) \right) =: \frac{4}{kl} w_{k,l},$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\int_0^\pi \sin ly \, dy = \frac{1}{l} \left[-\cos ly \right]_{y=0}^{\pi} = \frac{1}{l}(1-(-1)^l),$$

valamint

$$\int_0^\pi x \sin kx \, dx = \frac{1}{k} \left[-x \cos kx \right]_{x=0}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos ky \, dy = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{k}. \tag{2}$$

Ennek alapján

$$u(x,y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{4 w_{k,l}}{kl(k^2+l^2)} \cdot \frac{2}{\pi} \sin kx \sin ly.$$

Jegyezzük meg, hogy a fenti sor konvergenciája $L^2(T)$-ben értendő (valójában ennél sokkal erősebb konvergencia is igaz, azonban az e témakörhöz kapcsolódó eredmények nemtriviális tételek).

b) Mivel az egyenlet jobb oldalán éppen a bal oldalon szereplő megfelelő peremfeltétellel adott operátor sajátfüggvénye áll, ezért kézenfekvő az u megoldást $u(x,y) = c_1 \sin x \sin 4y + c_2 \sin 2x \sin 5y$ alakban keresni. Ekkor $-\Delta u(x,y) = (3^2+4^2)c_1 \sin 3x \sin 4y + (2^2+5^2)c_2 \sin 2x \sin 5y = 25c_1 \sin 3x \sin 4y + 29c_2 \sin 2x \sin 5y$. Ezt az egyenlet jobb oldalán szereplő függvénnyel összehasonlítva kapjuk, hogy $25c_1 = 3$, $29c_2 = -8$, vagyis $c_1 = \frac{3}{25}$ és $c_2 = -\frac{8}{29}$. Ennek alapján a feladat megoldása $u(x,y) = \frac{3}{25} \sin x \sin 4y - \frac{8}{29} \sin 2x \sin 5y$. A Dirichlet-feladat egyértelmű megoldhatósága alapján (lásd a 8. feladatsor 5. feladatát) ez a feladat egyenlet $C^2(T) \cap C^1(\overline{T})$-beli megoldása.

c) Mivel az egyenlet jobb oldalán éppen a bal oldalon szereplő megfelelő peremfeltétellel adott operátor sajátfüggvénye áll, ezért kézenfekvő az u megoldást $u(x,y) = c_1 \cos x \cos y + c_2$ alakban keresni. Ekkor $-\Delta u(x,y) = (1^2+1^2)c_1 \cos x \cos y = 2c_1 \cos x \cos y$. Ezt az egyenlet jobb oldalán szereplő függvénnyel összehasonlítva kapjuk, hogy $2c_1 = 1$, vagyis $c_1 = \frac{1}{2}$. Ennek alapján a feladat megoldásai $u(x,y) = \frac{1}{2} \cos x \cos y + c$. A Neumann-feladat megoldásának konstans függvény erejéig való egyértelműségére vonatkozó tétel (lásd a 8. feladatsor 5. feladatát) alapján az előbbi függvények alkotják a feladat összes $C^2(T) \cap C^1(\overline{T})$-beli megoldását.

*4. Legyen $T := (0,\pi)^2 \subset \mathbb{R}^2$, valamint $\Gamma_1 := \{\pi\} \times [0,\pi)$, $\Gamma_2 := (0,\pi] \times \{\pi\}$, $\Gamma_3 := \{0\} \times (0,\pi]$, $\Gamma_4 := [0,\pi) \times \{0\}$, továbbá legyenek $g, h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, amelyekre $\begin{cases} h|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 1, \; h|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0, \\ g|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 0, \; g|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 1. \end{cases}$ Oldjuk meg az alábbi peremérték-feladatot!

$$\begin{cases} -\Delta u = \sin x \cos 3y - 5 \sin 3x \cos 4y \quad T\text{-ben}, \\ (g \partial_\nu u + hu)|_{\partial T} = 0 \end{cases}$$

Megoldás. A feladat beadható, ezért a megoldást nem árulom el.

5. Oldjuk meg a következő parabolikus vegyes feladatokat!

a) $\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = x & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$

b) $\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = \sin 3x - 4\sin 5x & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$

c) $\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = \sin 2x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$

d) $\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = t\sin x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$

Megoldás. a) A Fourier-módszert alkalmazzuk, keressük az u megoldást $u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) u_k(x)$, ahol u_k a homogén Dirichlet-peremfeltétellel adott egydimenziós (mínusz) Laplace-operátor sajátfüggvénye ($k = 1, \dots$). Ehhez írjuk fel az egyenlet jobb oldalán és a mellékfeltételekben szereplő függvényeket ugyanebben a bázisban. A konstans 0 függvényt könnyen felírhatjuk, hiszen a sorfejtésben minden együttható 0. Ezenkívül világos, hogy

$$x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\sqrt{2\pi}}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx,$$

ahol felhasználtuk a 3. feladat a) részében szereplő (2) összefüggést, azaz $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin kx \, dx = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{k}$. Ekkor ξ_k-ra a következő kezdetiérték-feladat adódik $\mathbb{R}^+$-ban:

$$\xi_k'(t) + k^2 \xi_k(t) = 0$$
$$\xi_k(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{k}(-1)^{k+1}.$$

Szorozzuk a differenciálegyenlet mindkét oldalát $e^{k^2 t}$-vel, ekkor $\xi_k'(t) e^{k^2 t} + k^2 e^{k^2 t} = 0$, azaz $\left(\xi_k(t) e^{k^2 t}\right)' = 0$, vagyis $\xi_k(t) = \xi_k(0) e^{-k^2 t} = \frac{(-1)^{k+1}\sqrt{2\pi}}{k} e^{-k^2 t}$. Ennek alapján a parabolikus vegyes feladat megoldása:

$$u(t,x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} e^{-k^2 t} \sin kx.$$

Jegyezzük meg, hogy a fenti sor konvergenciája minden $t > 0$ esetén $L^2(0,\pi)$-ben értendő (valójában ennél sokkal erősebb konvergencia is igaz, de a kapcsolódó eredmények nemtriviális tételek).

b) A Fourier-módszert alkalmazzuk. Mivel a kezdeti függvény a homogén Dirichlet-peremfeltétellel adott (mínusz) Laplace-operátornak sajátfüggvénye, ezért keressük a megoldást $u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \sin kx$ alakban. Ekkor az egyenlet és a mellékfeltétel felhasználásával kapjuk, hogy $\xi_k' + \xi_k = 0$, $\xi_k(0) = 0$, ha $k \neq 3, 5$, amelynek az azonosan 0 függvény a megoldása, valamint $\xi_1'(t) = -9\xi_1(t), \xi_1(0) = 1$ és $\xi_2'(t) = -25\xi_2(t), \xi_2(0) = -4$. Ezek megoldásai $\xi_1(t) = e^{-9t}$ és $\xi_2(t) = -4e^{-25t}$, így a parabolikus vegyes feladat megoldása $u(t,x) = e^{-9t} \sin 3x - 4e^{-25t} \sin 5x$. Más megoldás nincs, mert a vegyes feladat megoldása egyértelmű (lásd előadás).

c) A Fourier-módszert alkalmazzuk. Írjuk fel a $\sin 2x$ függvényt $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \cdot \sin kx$ alakban! Világos, hogy $c_k = 1$, ha $k = 2$ különben pedig $c_k = 0$. Ekkor az u megoldást $u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \sin kx$ alakban keresve, az egyenlet és a mellékfeltétel felhasználásával kapjuk, hogy $\xi_k = 0$, ha $k \neq$, továbbá ξ_2-re a $\xi_2'(t) + 4\xi_2(t) = 1$ közönséges differenciálegyenlet és a $\xi_2(0) = 0$ kezdeti feltétel adódik. A differenciálegyenlet mindkét oldalát e^{4t}-vel szorozva $e^{4t}\xi_2'(t) + 4e^{4t}\xi_2(t) = 0$, azaz $(e^{4t}\xi_2(t))' = e^{4t}$, így $\xi_2(t) = e^{-4t}\xi(0)_2 + \frac{1}{4}(1 - e^{-4t}) = \frac{1}{4}(1 - e^{-4t})$. A parabolikus vegyes feladat megoldása tehát $u(t,x) = \frac{1}{4}(1 - e^{-4t}) \sin 2x$. Más megoldás nincs, mert a vegyes feladat megoldása egyértelmű (lásd előadás).

d) Az előzőek mintájára a Fourier-módszert alkalmazzuk, keressük most az u megoldást $u(t,x) = c(t) \sin x$ alakban! Ekkor a kezdeti feltételből $c(0) = 0$ adódik, továbbá u-t az egyenletbe helyettesítve a $c'(t) + c(t) = t$ közönséges differenciálegyenletet kapjuk. A differenciálegyenlet mindkét oldalát e^t-vel szorozva $e^t c'(t) + e^t c(t) = te^t$ adódik, így $(e^t c(t))' = te^t$, tehát (mivel $((te^t - e^t)' = te^t$, ezért) $c(t) = t - 1 + ce^{-t}$, így a kezdeti feltétel alapján $c(t) = t - 1 + e^{-t}$. A parabolikus vegyes feladat megoldása tehát $u(t,x) = (e^t + t - 1) \sin x$. Más megoldás nincs, mert a vegyes feladat megoldása egyértelmű (lásd előadás).

Érdemes megemlíteni, hogy Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) francia matematikus és fizikus volt, aki 1822-ben A hővezetés analitikus elmélete címmel kiadott munkájában a később róla elnevezett Fourier-sorok (tehát trigonometrikus sorok) elméletét alapozta meg. Ezirányú kutatásai mellett a francia Isère megye prefektusaként tevékenykedett, és ezalatt készítette el egyiptológiai témájú áttekintő monográfiáját is. Témavezetője Lagrange volt. Doktori tanítványai közé tartozott többek között Dirichlet. Az üvegházhatás felfedezése is Fourier nevéhez köthető.