8. feladatsor

III. éves alkmat parcdiff 2015. tavasz

*1. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$-ben a $\Delta u = 0$ Laplace-egyenlet elforgatásra nézve invariáns, azaz ha Q $n \times n$-es ortogonális mátrix, akkor a $v(x) = u(Qx)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ függvényre $\Delta v = 0$.

2. Keressük meg a $\Delta u = 0$ egyenlet $u(x) = v(|x|)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ alakú (más szóval radiálisan szimmetrikus) megoldásait, ahol $v\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ függvény.

3. Legyen a továbbiakban $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, továbbá $p \in C^1(\overline{\Omega})$, amelyre $p(x) \geq m > 0$ minden $x \in \overline{\Omega}$ esetén. Definiáljuk az $Lu := -\operatorname{div}(p\nabla u) = -\sum_{i=1}^{n} \partial_i(p\partial_i u)$ másodrendű differenciáloperátort. Bizonyítsuk be, hogy L egyenletesen elliptikus operátor.

4. Legyen L a 3. feladatban definiált operátor.

   a) Legyen $D(L) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})\colon u|_{\partial\Omega} = 0,\ Lu \in L^2(\Omega)\}$ Igazoljuk, hogy ekkor az $L\colon L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ operátor szimmetrikus, azaz $\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)}$ minden $u, v \in D(L)$ esetén, továbbá L szigorúan pozitív, azaz $\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} > 0$ minden $u \in D(L)$, $u \not\equiv 0$ esetén.

   b) Legyen $D(L) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})\colon \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0,\ Lu \in L^2(\Omega)\}$ Igazoljuk, hogy ekkor az $L\colon L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ operátor szimmetrikus, azaz $\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)}$ minden $u, v \in D(L)$ esetén, továbbá L pozitív, azaz $\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} \geq 0$ minden $u \in D(L)$ esetén, és egyenlőség csak $u \equiv c \in \mathbb{R}$ esetén állhat fenn.

5. Mutassuk meg, hogy a Dirichlet-feladatnak legfeljebb egy $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$-beli megoldása lehet, a Neumann-feladat $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$-beli megoldásai pedig csak konstansban térhetnek el egymástól.

6. Igazoljuk, hogy ha L a 3. feladatban definiált operátor és $D(L) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})\colon \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0,\ Lu \in L^2(\Omega)\}$, akkor $R(L) \subset \ker(L)^\perp$, azaz ha $\begin{cases} Lu = f & \Omega\text{-ban}, \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$, akkor $\int_\Omega f = 0$.

7. Legyen $\Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Bizonyítsuk be, hogy a $\begin{cases} \Delta u = 1 & \Omega\text{-ban}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$ feladatnak nincs $u \in C^2(\overline{\Omega})$ megoldása.

8. Legyen $B_1(0)$ az origó középpontú 1 sugarú nyílt körlap. Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén van az alábbi peremérték-feladatnak $u \in C^2(B_1(0)) \cap C^1(\overline{B_1(0)})$ megoldása? Adjuk meg a megoldásokat!

$$\begin{cases} \Delta u = \alpha & B_1(0)\text{-ban}, \\ \partial_\nu u|_{\partial B_1(0)} = 1. \end{cases}$$

9. Legyen $B_1(0)$ az origó középpontú 1 sugarú nyílt körlap, továbbá $T := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x + 2y^2 < 1\right\}$ (egy ellipszis belseje). Oldjuk meg az alábbi peremérték-feladatokat!

   a) $\begin{cases} \Delta u = x + y & B_1(0)\text{-ban}, \\ u|_{\partial B_1(0)} = 0. \end{cases}$

   b) $\begin{cases} \Delta u = x & B_1(0)\text{-ban}, \\ u|_{\partial B_1(0)} = y^2. \end{cases}$

   c) $\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{a } T \text{ tartományban}, \\ u|_{\partial T} = x^2. \end{cases}$