7. feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2015. tavasz

1. Tekintsük a

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\text{-ben}, \\ v(0,x) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n), \\ \partial_t v(0,x) = f(\tau, x) & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

feladatcsaládot, ahol $f \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ és $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ paraméter. Tegyük fel, hogy minden $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ esetén a feladat $v(\cdot, \cdot; \tau)$ megoldására $v, \partial_t^2 v, \Delta v \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+)$. Értelmezzük ekkor az u függvényt a következőképpen:

$$u(t,x) = \int_0^t v(t-\tau, x; \tau)\, d\tau.$$

Igazoljuk, hogy $\partial_t^2 u - \Delta u = f \;\; \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$-ben, $u(0,x) = 0$ és $\partial_t u(0,x) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, azaz u megoldása a második részfeladatnak! (Duhamel-elv)

2. Legyen w a következő feladat megoldása:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\text{-ben}, \\ w(0,x) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n), \\ \partial_t w(0,x) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy $w \in C^3(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n)$, és legyen ekkor $u(t,x) = \partial_t w(t,x)$ $((t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n)$. Igazoljuk, hogy $\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \;\; \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$-ben, $u(0,x) = g(x)$ és $\partial_t u(0,x) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, azaz u megoldása a harmadik részfeladatnak!

3. Oldjuk meg $n = 1$ esetén az első részfeladatot!

4. Bizonyítsuk be, hogy $n = 1$ és $g \in C^2(\mathbb{R})$ esetén a harmadik részfeladat megoldása $u(t,x) = \dfrac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t))$ $((t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$.

5. Oldjuk meg a következő Cauchy-feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = t - x & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = \sin x & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t u(0,x) = \cos x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

6. Legyen u a következő feladat megoldása:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = g(x) & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t u(0,x) = h(x) & (x \in \mathbb{R}), \end{cases}$$

ahol g, $h \in C(\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy ha $\operatorname{supp} g, \operatorname{supp} h \subset [a,b]$, akkor $\operatorname{supp} u(t,\cdot) \subset [a-t, b+t]$ minden $t > 0$ esetén. (Véges sebességű hullámterjedés)

7. Igazoljuk $n = 1$ esetén, hogy a hiperbolikus Cauchy-feladat u megoldása folytonosan függ h-tól a következő értelemben: ha h_1, $h_2 \in C(\mathbb{R}^n)$, amelyekre $|h_1(x) - h_2(x)| \le \varepsilon$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor a Cauchy-feladat megfelelő u_1, u_2 megoldásaira $|u_1(tx) - u_2(t,x)| \le \varepsilon t$ $((t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$.

8. Mutassuk meg $n = 1$ esetén, hogy a hiperbolikus Cauchy-feladat u megoldása folytonosan függ f-től a következő értelemben: ha $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, amelyekre $|f_1(t,x) - f_2(t,x)| \le \varepsilon$ $((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, akkor $|u_1(t,x) - u_2(t,x)| \le \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$ $((t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$.

*9. Legyen $u \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times [0,1])$ az egydimenziós $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ hullámegyenlet egy olyan megoldása, amelyre $u(t,0) = u(t,1) = 0$ minden $t \ge 0$ esetén (mindkét végén rögzített húr). Mutassuk meg, hogy ekkor az

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\partial_t u(t,x))^2 + (\partial_x u(t,x))^2 \right) dx$$

formulával értelmezett függvény (mechanikai energia) valójában nem függ t-től.