4. feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2015. tavasz

1. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ adott.
   a) Legyen $\varphi_j(x) := \frac{1}{j}\varphi(x)$ $(x \in \Omega, j \in \mathbb{N}^+)$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\varphi_j \to 0$ $\mathscr{D}(\Omega)$-ban!
   b) Legyen $\Omega = \mathbb{R}^n$, továbbá $\varphi_j(x) := \frac{1}{j}\varphi(\frac{x}{j})$ $(x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}^+)$. Konvergens-e a (φ_j) sorozat $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-ben?
   c) Legyen $\Omega = \mathbb{R}^n$, továbbá $\varphi_j(x) := \frac{1}{j}\varphi(jx)$ $(x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}^+)$. Konvergens-e a (φ_j) sorozat $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-ben?
2. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány és $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvény.
   a) Értelmezzük a $T_f \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen: $T_f(\varphi) := \int_\Omega f\varphi$. Igazoljuk, hogy T_f nulladrendű disztribúció! (T_f az f függvényhez tartozó reguláris disztribúció.)
   b) Legyen $u \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, amelyre $u(\varphi) = \int_\Omega f\partial^\beta\varphi$, ahol β adott multiindex. Bizonyítsuk be, hogy $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ és véges rendű! Meghatározza-e (m.m.) egyértelműen u az f függvényt?
3. Adott $a \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen $\delta_a \colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, amelyre $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$.
   a) Bizonyítsuk be, hogy δ_a nulladrendű disztribúció! (δ_a az a ponthoz tartozó Dirac-delta disztribúció)
   b) Bizonyítsuk be, hogy δ_a nem reguláris disztribúció, azaz nem létezik $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvény, amelyre $\delta_a = T_f$.
4. Legyen $\Omega = (0, 2)$, és értelmezzük az $u \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következő módon:
$$u(\varphi) := \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{(j)}\left(\frac{1}{j}\right).$$
   Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$! *Véges rendű-e u?
5. Legyen $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges. Mutassuk meg, hogy $|\alpha| \le m$ esetén minden $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-re $T_{\partial^\alpha f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T_f(\partial^\alpha\varphi)$!
6. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ és α multiindex. Definiáljuk u deriváltját $\partial^\alpha u(\varphi) := (-1)^{|\alpha|}u(\partial^\alpha\varphi)$ módon. Bizonyítsuk be, hogy $\partial^\alpha u$ disztribúció!
7. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$. Hogyan hat egy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvényre $\partial^\alpha\delta_a$?
8. Vezessük be a következő $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket: $\mathrm{abs}(x) := |x|$, $\mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$ és $H(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1, & \text{ha } x \ge 0 \end{cases}$
   (az úgynevezett Heaviside-függvény). Bizonyítsuk be, hogy
   a) $T'_{\mathrm{abs}} = T_{\mathrm{sgn}}$
   b) $T'_{\mathrm{sgn}} = 2\delta_0$
   c) $T'_H = \delta_0$.
9. Van-e olyan $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció, amelyre $u' = \delta_{-1} + \delta_1$?
10. Bizonyítsuk be, hogy az $u(x) = H(x)\sin x$ függvény disztribúció értelemben megoldása az $u'' + u = \delta_0$ differenciálegyenletnek ($\mathbb{R}$-en).
11. Legyen $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, amelyre $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } xy \ge 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$ Adjuk meg a $\partial_{12}T_f$ disztribúciót egyszerűbb alakban!
12. Az n-dimenziós $\tilde{H} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Heaviside-függvényt a következőképpen értelmezzük:
$$\tilde{H}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_i \ge 0 \text{ minden } i = 1, \dots, n\text{-re}, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$
   a) Bizonyítsuk be, hogy $\partial_1\partial_2 \cdots \partial_n\tilde{H} = \delta_0$!
   b) Mutassuk meg, hogy $\partial_1\partial_2 \cdots \partial_n r = \tilde{H}$, ahol
$$r(x) = \begin{cases} x_1x_2 \cdots x_n, & \text{ha } x_i \ge 0 \text{ minden } i = 1, \dots, n\text{-re}, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$
13. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén $u(\varphi) := \int_0^{+\infty} \varphi(0, y)dy$. Igazoljuk, hogy
   a) $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$,
   b) $\partial_2 u = \delta_{(0,0)}$,
   c) van olyan $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, amelyre $u = \partial_1 T_f$.

*14. Az $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúcióra $u' = 0$. Következik-e ebből, hogy $u = c$ valamilyen $c \in \mathbb{R}$ konstanssal?