

1. Keressük meg az alábbi egyenletek  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  klasszikus megoldásait!

- a)  $\partial_y u = 0$                       e)  $\partial_x u - \partial_y u = 0$   
 b)  $\partial_{xy} u = 0$                     f)  $\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0$   
 c)  $\partial_{xy} u = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$             g)  $\partial_x^2 u - a^2 \partial_y^2 u = 0$  ( $a \in \mathbb{R}$ )  
 d)  $\partial_{xy} u + 2x \partial_y u = x$         h)  $(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = 0$

**Megoldás.** a)  $\partial_y u = 0 \iff u(x, y) = c(x)$ , ahol  $c \in C^1(\mathbb{R})$ .

b)  $\partial_{xy} u = \partial_x(\partial_y u) = 0 \iff \partial_y u = c(y) \iff u(x, y) = C(y) + D(x)$ , ahol  $C, D \in C^1(\mathbb{R})$ .

c)  $\partial_{xy} u = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \iff \partial_y u = -\frac{2y}{x^2 + y^2} + c(y) \iff u(x, y) = -\log(x^2 + y^2) + C(y) + D(x)$ , ahol  $C, D \in C^2(\mathbb{R})$ .

Annyit azért jegyezzük meg, hogy a megoldás csak az  $\mathbb{R} \setminus \{0, 0\}$  halmazon értelmezett.

d) Legyen  $y$  rögzített és definiáljuk a  $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt a  $v(x; y) = \partial_y u(x, y)$  hozzárendeléssel (ahol most  $y$  paraméter). Ekkor a feladatunk a  $v'(x; y) + 2xv(x; y) = x$  alakot ölti (ahol „'” az  $x$  szerinti deriválást jelenti). Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát  $e^{x^2}$ -tel, ekkor  $e^{x^2} v'(x; y) + 2xe^{x^2} v(x; y) = xe^{x^2}$  adódik. Vegyük észre, hogy a bal oldalon éppen az  $x \mapsto e^{x^2} v(x; y)$  függvény ( $x$  szerinti) deriváltja áll, a jobb oldalon pedig az  $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$  függvény ( $x$  szerinti) deriváltja, így az egyenlet mindkét oldalát  $x$  szerint integrálva  $e^{x^2} v(x; y) = \frac{1}{2}e^{x^2} + c(y)$  adódik (mivel  $y$  paraméter  $v$ -ben, ezért az integrálás során keletkező  $c$  konstans függ  $y$ -tól). Innen rendezéssel  $v(x; y) = \frac{1}{2} + c(y)e^{-x^2}$  adódik. Mivel  $v(x; y) = \partial_y u(x, y)$ , ezért  $u(x, y) = \frac{1}{2}y + C(y)e^{-x^2} + D(x)$ , ahol  $C, D \in C^1(\mathbb{R})$ . Megjegyezzük, hogy az  $e^{x^2} v'(x; y) + 2xe^{x^2} v(x; y) = xe^{x^2}$  egyenletet úgy is megoldhattuk volna, hogy először a homogén probléma megoldását keressük meg, és utána a konstans variálásának módszerével (Lagrange-módszer) megadunk egy partikuláris megoldást. Sőt, úgy is célhoz értünk volna, ha a kiindulási egyenletet szorozzuk  $e^{x^2}$ -tel és észrevesszük, hogy az így kapott egyenlet bal oldalán éppen  $\partial_{xy}(e^{x^2} u(x, y))$  áll. Végül az is célravezető lett volna, ha először  $y$  szerint integráljuk az egyenletet, majd az  $x \mapsto u(x, y)$  függvényre kapott közönséges differenciálegyenletet megoldjuk. Valójában az előbbi módszerek mindegyike mögött ugyanaz a gondolat rejlik.

e) I. megoldás. Legyen  $v = (1, -1)$ . Ekkor a feladat azt jelenti, hogy  $0 = (\partial_x u, \partial_y u) \cdot v = \partial_v u$ , más szóval az  $u$  függvény  $v$  irányban vett iránymenti deriváltja (minden pontban) 0. Ez azt jelenti, hogy az  $x + y = \text{const}$  egyenesek mentén  $u$  konstans. Így  $u(x, y) = c(x + y)$ , ahol  $c \in C^1(\mathbb{R})$ .

II. megoldás. Az előbbi megoldás adhatja azt az ötletet számunkra, hogy forgassuk el (és esetleg nyújtsuk meg vagy nyomjuk össze) a koordinátarendszert úgy, hogy valamelyik tengely iránya az  $(1, -1)$  vagy  $(-1, 1)$  vektor legyen. Például legyen  $\xi = x + y$ ,  $\eta = x - y$ , és térjünk át  $(\xi, \eta)$  koordinátákra (ez a koordinátarendszer  $45^\circ$ -os negatív irányú forgatását és kétszeres nyújtását jelenti). Ekkor  $u(x, y) = U(\xi, \eta)$ , így

$$(\partial_x u(x, y), \partial_y u(x, y)) = u'(x, y) = U'(\xi, \eta) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = (\partial_\xi U(\xi, \eta), \partial_\eta U(\xi, \eta)) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ami azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_\xi U + \partial_\eta U \\ \partial_y u &= \partial_\xi U - \partial_\eta U. \end{aligned}$$

Ebből következően  $\partial_x u - \partial_y u = 2\partial_\xi U$ , tehát feladatunk a  $\partial_\eta U = 0$  alakot ölti. Ennek megoldása (az a) rész alapján)  $U(\xi, \eta) = C(\xi)$ , vagyis  $u(x, y) = C(x + y)$ , ahol  $C \in C^1(\mathbb{R})$ .

f) Az előző rész megoldását folytatva könnyen látható, hogy

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u &= \partial_\xi(\partial_\xi U + \partial_\eta U) + \partial_\eta(\partial_\xi U + \partial_\eta U) = \partial_\xi^2 U + 2\partial_{\xi\eta} U + \partial_\eta^2 U \\ \partial_y^2 u &= \partial_\xi(\partial_\xi U - \partial_\eta U) - \partial_\eta(\partial_\xi U - \partial_\eta U) = \partial_\xi^2 U - 2\partial_{\xi\eta} U + \partial_\eta^2 U. \end{aligned}$$

Így  $\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 4\partial_{\xi\eta} U$ , vagyis feladatunk alakja  $\partial_{\xi\eta} U = 0$ . Ennek megoldása (a b) rész alapján)  $U(\xi, \eta) = C(\xi) + D(\eta)$ , azaz  $u(x, y) = C(x + y) + D(x - y)$ , ahol  $C, D \in C^2(\mathbb{R})$ .

g) Először tegyük fel, hogy  $a \neq 0$ . Legyen  $u$  megoldása a  $\partial_x^2 u - a^2 \partial_y^2 u = 0$  egyenletnek, és vezessük be a  $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  függvényt, amelyre  $v(x, y) = u(x, ay)$ . Ekkor  $\partial_x^2 v(x, y) - \partial_y^2 v(x, y) = \partial_x^2 u(x, ay) - a^2 \cdot \partial_y u(x, ay) = 0$ , hiszen  $u$  megoldása a  $\partial_x^2 u - a^2 \partial_y^2 u = 0$  feladatnak. Ennek megfelelően  $v$  kielégíti a  $\partial_x^2 v(x, y) - \partial_y^2 v(x, y) = 0$  differenciálegyenletet, így az f) rész alapján  $v(x, y) = c(x + y) + d(x - y)$ , tehát  $u(x, y) = v(x, \frac{1}{a}y) = c(x + \frac{1}{a}y) + d(x - \frac{1}{a}y) = c(\frac{1}{a}(ax + y)) + d(\frac{1}{a}(ax - y)) = C(y + ax) + D(y - ax)$ , ahol  $C, D \in C^1(\mathbb{R})$ . Most vizsgáljuk meg az  $a = 0$  esetet! Ekkor az egyenlet  $\partial_x^2 u(x, y) = 0$  alakra egyszerűsödik. Nyilván  $\partial_x u(x, y) = C(y)$ , és így  $u(x, y) = xC(y) + D(y)$ , ahol,  $C, D \in C^1(\mathbb{R})$ .

Írjuk át az egyenletet  $(t, x)$  változókra ( $t$  az időt jelképezi,  $x$  pedig a térváltozó), ekkor  $\partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u = 0$  az egydimenziós hullámeqyenlet. A megoldásokat  $u(t, x) = C(x + at) + D(x - at)$  alakban írhatjuk. Vegyük észre, hogy  $C(x - at)$  egy  $a$

sebességgel balra utazó hullám,  $D(x+at)$  pedig jobbra utazó hullám. Ezek összege (szuperpozíciója) adja a hullámegyenlet általános megoldását. Megjegyezzük, hogy a hullámegyenletet először Brook Taylor (1685–1731) írta fel (a mechanika törvényei alapján), a fenti megoldást pedig Jean le Rond D'Alembert (1717–1783) adta meg 1747-ben. A szuperpozíció elvét Daniel Bernoulli (1700–1782) fogalmazta meg először 1753-ban.

h) Vegyük észre, hogy a bal oldal majdnem mindig pozitív, kivéve ha  $\partial_x u(x, y) = \partial_y u(x, y) = 0$  minden  $(x, y)$  esetén. Ebből következően  $u(x, y) = c$ , ahol  $c \in \mathbb{R}$ .

2. Adjuk meg a  $\partial_x^2 u(x, y, z) = 0$  feladat  $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$  általános megoldását!

**Megoldás.** Mivel  $\partial_x^2 u(x, y, z) = \partial_x(\partial_x u(x, y, z)) = 0$ , ezért  $\partial_x u(x, y, z) = C(y, z)$ , így  $u(x, y, z) = xC(y, z) + D(y, z)$ , ahol  $C, D \in C^2(\mathbb{R}^2)$  függvények.

3. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladatok  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  megoldását!

$$\text{a) } \begin{cases} \partial_{xy} u = x + y \\ u(x, x) = x \\ \partial_1 u(x, x) = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0 \\ u(0, y) = 1 \\ \partial_x u(0, y) = 1 \end{cases}$$

**Megoldás.** a)  $\partial_{xy} u = x + y \iff \partial_x u = xy + \frac{1}{2}y^2 + c(x)$ . Ekkor  $0 = \partial_x u(x, x) = \frac{3}{2}x^2 + c(x)$ , így  $c(x) = -\frac{3}{2}x^2$ , azaz  $\partial_x u(x, y) = xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}x^2$ . Ebből következően  $u(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}x^3 + d(y)$ . Mivel  $x = u(x, x) = \frac{1}{2}x^3 + d(x)$ , ezért  $d(x) = x - \frac{1}{2}x^3$ . Mindezek alapján  $u(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}y^3 + y$ .

b) (A feladatban szereplő  $\partial_1 u(x, x)$  jelölés úgy értendő, hogy  $(\partial_1 u)(x, x)$ .) Az 1. feladat f) része alapján tudjuk, hogy  $u(x, y) = C(x+y) + D(x-y)$ , ahol  $C, D \in C^2(\mathbb{R})$ . Az  $u$ -ra kirótt mellékfeltételek a  $C, D$  függvényekre nézve a következőket jelentik:

$$\begin{cases} 1 = C(y) + D(-y) \\ 1 = C'(y) + D'(-y). \end{cases}$$

Az első egyenletet  $y$  szerint deriválva kapjuk, hogy  $0 = C'(y) - D'(-y)$ . Ezt a második egyenlethez hozzáadva  $2C'(y) = 1$  adódik, ami azt jelenti, hogy  $C(y) = \frac{1}{2}y + c$ , ahonnan  $D(y) = 1 + \frac{1}{2}y - c$ . Végeredményben tehát

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(x+y) + c + 1 - \frac{1}{2}(x-y) - c = x + 1.$$

4. Keressük meg a  $\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0$  egyenlet  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  alakú klasszikus megoldásait!

**Megoldás.** Az egyenletbe behelyettesítve az  $X(x)Y(y)$  függvényt  $X''(x)Y(y) - X(x)Y''(y) = 0$  adódik, azaz (formálisan leosztva, nem törődve az esetleges 0-val való osztással)  $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}$  minden  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  esetén. Az előbbi egyenlet bal oldala csak  $x$ -től, a jobb oldal pedig csak  $y$ -től függ. Ennek következtében  $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \alpha \in \mathbb{R}$ , amelynek megoldása  $Y(y) = ce^{\alpha y}$ , és  $\alpha$  előjelétől függően

$$X(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{\alpha}x} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha}x}, & \text{ha } \alpha > 0, \\ c_1 x + c_2, & \text{ha } \alpha = 0, \\ c_1 \sin(\sqrt{|\alpha|x}) + c_2 \cos(\sqrt{|\alpha|x}), & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases}$$

(Valójában a fenti függvények között, a látszat ellenére, szoros kapcsolat van: mindegyik az  $\alpha e^{\sqrt{-\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}x}$  függvényből származik, ahol  $\alpha, \beta$  komplex számok. Ha  $\lambda < 0$ , akkor visszkapjuk az exponenciális függvények lineáris kombinációját, amely valójában szinusz-hiperbolikus és koszinusz-hiperbolikus függvények lineáris kombinációja. A  $\lambda > 0$  esetben a kitevőben tisztán képzetes szám áll, így ekkor a szinusz és koszinusz függvények lineáris kombinációját nyerjük. A  $\lambda = 0$  eset  $\lambda \rightarrow 0$  határátmenettel kapható. Ebben az esetben nyerjük a konstans függvényeket, valamint az  $\frac{1}{\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x})$  hányadosból (amely ugyancsak megoldás)  $\lambda \rightarrow 0$  esetén adódó  $\text{const} \cdot x$  függvényeket.) Az így kapott  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  alakú függvények mind kielégítik a fenti egyenletet. Vigyázzunk, a feladat nem állítja, hogy csak ilyen alakú megoldásai lehetnek az egyenletnek, például  $u(x, y) = x^2 + 2y$  is megoldás, de könnyen láthatóan nem áll elő szorzat alakban. Azt azért mindenesetre várhatjuk, hogy a fenti speciális alakú megoldások végtelen lineáris kombinációi esetleg előállíthatják az összes megoldást. Később ez a módszer lesz a megoldások Fourier-sor alakban való keresése.

5. Keressünk  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  polinomokat, amelyekre  $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ .

**Megoldás.** Próbálgatással (illetve a határozatlan együtthatók módszerével) könnyen találhatunk néhány alacsonyabb fokú polinomot, amelyekre teljesül a kívánt egyenlet. Például a konstans polinomok,  $x, y, x^2 - y^2$ . Felmerül a kérdés, vajon hogyan adható meg olyan  $n$ -edfokú polinom, amely kielégíti a kívánt egyenletet. A komplex függvénytanból ismeretes, hogy a  $\Delta u = 0$  feladat klasszikus megoldásai két dimenzióban  $u(x, y) = \text{Re } f(x + iy)$  alakúak, ahol  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tetszőleges reguláris függvény. Legyen  $f(z) = z^n$ , más szóval  $f(x + iy) = (x + iy)^n$ , ekkor  $f$  reguláris, tehát az előbbi megjegyzés miatt teljesül rá a  $\Delta u = 0$  egyenlet. Másrészt  $\text{Re } f$  nyilván kétváltozós polinom. Az első néhány ilyen polinom például:  $x, x^2 - y^2, x^3 - 3xy^2$ , stb. Jegyezzük meg, hogy  $\text{Im } f$  is megfelelő polinomot ad, ezek mind eleget tesznek a feladat kívánalmainak. Megemlítjük, hogy (adott tartományon) a  $\Delta u = 0$  egyenletnek eleget tevő függvényeket harmonikus függvényeknek nevezzük (amelyek a későbbiekben részletesebben is előkerülnek majd). A fentiek alapján tehát

sikerült minden  $n$  természetes számra megadtunk két  $n$ -edfokú harmonikus polinomot. Megmutatjuk, hogy ezzel lényegében előállítottuk az összes kétváltozós harmonikus polinomot, pontosabban a fentiekben kapott polinomok a kétváltozós harmonikus polinomok vektorterének egy bázisát alkotják. A függetlenségük nyilvánvaló, így elég belátnunk, hogy a homogén  $n$ -edfokú harmonikus polinomok vektortere  $n \geq 1$  esetén kétdimenziós. Adott  $n \geq 1$  esetén tekintsük tehát az  $\{x^j y^k : j+k=n, j, k \geq 0\}$  homogén  $n$ -edfokú polinomok (mint bázisvektorok) által meghatározott  $P_n$  vektorteret. Világos, hogy a  $\Delta$  lineáris operátor  $P_n$ -et  $P_{n-2}$ -be képezi. Az  $x^j y^k$  monom valamelyik kitevőjére vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy  $\Delta: P_n \rightarrow P_{n-2}$  szürjektív. Ebből következően  $\dim \text{Ker } \Delta = \dim P_n - \dim P_{n-2}$ . Most már csak azt kell észrevennünk, hogy a  $P_n$  vektortér  $(n+1)$  dimenziós, (hiszen a  $j+k=n$  felbontásban  $j$ -re  $(n+1)$  választási lehetőségünk van, és ezzel  $k$  is egyértelműen meg van határozva), így  $\dim P_n - \dim P_{n-2} = n+1 - (n-1) = 2$ , ezért a homogén  $n$ -edfokú harmonikus polinomok vektortere kétdimenziós. E tér egy bázisát a fentiekben megadtuk. Általában egy  $n$ -edfokú harmonikus polinomot felírhatunk, mint a homogén  $n$ -edfokú,  $(n-1)$ -edfokú stb. polinomok összege, e polinomokat pedig a fenti báziselemek segítségével írhatjuk fel, tehát bármely harmonikus polinomot egyértelműen előállíthatunk a  $\text{Re}(x+iy)^n$  és  $\text{Im}(x+iy)^n$  alakú polinomok lineáris kombinációjaként.

6. Tegyük fel, hogy az  $u \in C^4(\mathbb{R}^2)$  függvényre  $\Delta u = 0$ . Igazoljuk, hogy ekkor a  $v(x, y) := (x^2 + y^2)u(x, y)$  függvényre  $\Delta^2 v = 0$ .

**Megoldás.** Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\partial_x v(x, y) = 2xu(x, y) + (x^2 + y^2)\partial_x u(x, y), \quad \partial_y v(x, y) = 2yu(x, y) + (x^2 + y^2)\partial_y u(x, y),$$

ezért

$$\partial_x^2 v(x, y) = 2u + 4x\partial_x u(x, y) + (x^2 + y^2)\partial_x^2 u(x, y) \quad \partial_y^2 v(x, y) = 2u + 4y\partial_y u(x, y) + (x^2 + y^2)\partial_y^2 u(x, y)$$

és így  $\Delta u = 0$  figyelembe vételével

$$\Delta v(x, y) = 4u(x, y) + 4x\partial_x u(x, y) + 4y\partial_y u(x, y).$$

Ebből következően, ismét  $\Delta u = 0$  felhasználásával,

$$\Delta^2 v(x, y) = \Delta(4x\partial_x u(x, y) + 4y\partial_y u(x, y)).$$

A fentiekhez hasonló egyszerű számolással nyerjük, hogy

$$\partial_x^2(4x\partial_x u(x, y)) = 8\partial_x^2 u(x, y) + 4x\partial_x^2 u(x, y) + 4x\partial_x \partial_y^2 u(x, y) = 8\partial_x^2 u(x, y) + 4x\partial_x \Delta u(x, y) = 8\partial_x^2 u(x, y),$$

valamint

$$\partial_y^2(4y\partial_y u(x, y)) = 8\partial_y^2 u(x, y) + 4y\partial_y^2 u(x, y) + 4y\partial_y \partial_x^2 u(x, y) = 8\partial_y^2 u(x, y) + 4y\partial_y \Delta u(x, y) = 8\partial_y^2 u(x, y),$$

tehát

$$\Delta^2 v(x, y) = 8\Delta u(x, y) = 0.$$

Megjegyezzük, hogy a  $\Delta^2 u = 0$  egyenlet az úgynevezett *biharmonikus egyenlet*, amely a rugalmasságtanban fordul elő. Ezt a rugalmasságtani modellt először Sophie Germain (1776–1831) írta fel (akiről kevésbé ismert rugalmasságtani munkássága, inkább számelméleti eredményeiről híres). Később Claude-Louis Navier (1785–1836) (aki hidépítő mérnök volt, és a Navier-Stokes-egyenleteket elsőként írta fel), majd Siméon-Denis Poisson (1781–1840), aztán Gustave Kirchhoff (1824–1887) és Lord Kelvin (1824–1907) fejlesztették tovább, ezért a modellt szokás (kissé hosszán) Germain-Navier-Poisson-Kirchhoff-Kelvin-modellnek is hívni.

\*7. Adjuk meg a  $\partial_x u \cdot \partial_y u = 0$  egyenlet  $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$  megoldásait!

**Megoldás.** A feladat beadható, ezért a megoldást nem árulom el.