

2. zh (A) feladatsor  
 III. éves alkmat parcdiff 2014. tavasz

1. Oldjuk meg a következő parabolikus Cauchy-feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = x^3 + t^2 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = 0 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

2. Legyenek  $g, h \in C^1(\mathbb{R})$  monoton növekvő függvények. Igaz-e, hogy ekkor a

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = g(x) & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t u(0, x) = h(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

hiperbolikus Cauchy-feladat  $u$  megoldására minden rögzített  $t > 0$  esetén  $x \mapsto u(t, x)$  is monoton növekvő függvény?

3. Legyen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  korlátos, sima peremű tartomány, továbbá  $p \in C^1(\overline{\Omega})$ , amelyre  $p(x) \geq m > 0$  minden  $x \in \overline{\Omega}$  esetén. Definíáljuk az  $L: L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  operátort a következőképpen:

$$D(L) := \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} + \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0, Lu \in L^2(\Omega)\}, \quad Lu := -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + u.$$

Igazoljuk, hogy ekkor az  $L: L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  operátor szimmetrikus, azaz  $\langle Lu, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, Lv \rangle_{L^2(\Omega)}$  minden  $u, v \in D(L)$  esetén, továbbá  $L$  szigorúan pozitív, azaz  $\langle Lu, u \rangle_{L^2(\Omega)} > 0$  minden  $u \in D(L)$ ,  $u \neq 0$  esetén.

4. Legyen  $\Omega := B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$ , ahol  $B_R(0)$  jelöli az origó középpontú  $R$  sugarú nyílt körlapot a síkon. Milyen  $\alpha \in \mathbb{R}$  esetén van az alábbi peremérték-feladatnak  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  megoldása? Adjuk meg a megoldásokat!

$$\begin{cases} \Delta u = \alpha & \Omega\text{-ban,} \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 1. \end{cases}$$

5. Legyen  $\Omega = \{x^2 - 2x + y^2 < 3\} \subset \mathbb{R}^2$  és oldjuk meg a következő elliptikus peremérték-feladatot!

$$\begin{cases} \Delta u = 6x + 8y & \Omega\text{-ban,} \\ u|_{\partial\Omega} = x^3 + y^2. \end{cases}$$

6. Oldjuk meg a következő parabolikus vegyes feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = \sin t \sin x & ((t, x) \in \mathbb{R}^+ \times (0, \pi)), \\ u(0, x) = \sin 2x & (x \in [0, \pi]), \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0. & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

7. Legyen  $a > 0$ , és határozzuk meg a következő operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

$$D(L) := \{u \in C^2(0, a) \cap C^1([0, a]) : u(0) = 0, u'(a) = 0\}, \quad Lu := -2u'' + u$$