1. zh (B) feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2014. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{cases} \partial_{xy}u(x,y) + \partial_y u(x,y) = 2 \\ \qquad u(x+y, x-y) = 4x. \end{cases}$$

2. Adjunk meg olyan legalább másodfokú kétváltozós p, q polinomokat, amelyekre $\Delta p = 0, \Delta q = 0$ és $\Delta(pq) = 0$.

3. Keressük meg a $\partial_x u(x,y) + xy\partial_y u(x,y) = xyu(x,y)$ elsőrendű kvázilineáris egyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amely az y tengely mentén azonosan 1.

4. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{xy}u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $y = 2x^4$ egyenletű görbe fölötti és az $y = x^2 - 1$ egyenletű görbe alatti tartományban elliptikus, a két görbe közötti tartományban pedig hiperbolikus legyen.

5. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ rögzített függvény és értelmezzük a $(\varphi_j) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényeket a $\varphi_j(x) = e^{-j^2}\varphi(e^j x)$ $(x \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots)$ hozzárendeléssel. Igaz-e, hogy ekkor a (φ_j) függvénysorozat konvergens a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ térben? Ha igen, mi a határértéke?

6. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ a $(0,0)$, $(1,0)$ és $(1,1)$ pontok által meghatározott nyílt háromszöglap a síkon. Értelmezzük az $u \colon \mathscr{D}(H) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:

$$u(\varphi) := \int_0^1 \int_0^x xy\varphi(x,y)\,dy\,dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(H)).$$

   Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(H)$! Igaz-e, hogy $\partial_{12}u$ reguláris disztribúció?

7. Adjunk meg szükséges és elégséges feltételt, hogy egy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényhez létezzen $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény, amelyre $\psi' = \varphi$.