1. zh (A) feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2014. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{cases} \partial_{xy} u(x,y) = 1 \\ u(x^2 - y^2, x^2 + y^2) = 2x^4. \end{cases}$$

2. Adjuk meg az összes olyan egész együtthatós kétváltozós p polinomot, amelyre $\Delta p = 1$ a síkon.

3. Keressük meg a $\partial_x u(x,y) + e^y \partial_y u(x,y) = 2$ elsőrendű kvázilineáris egyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amelynek grafikonja tartalmazza az x tengelyt.

4. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{xy} u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $y = 2x^2$ egyenletű parabola fölötti és az $y = x^2 - 1$ egyenletű parabola alatti tartományban hiperbolikus, a két parabola közötti tartományban pedig elliptikus legyen.

5. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}((0,1))$ rögzített függvény, amelyet a $(0,1)$-en kívülre 0-ként kiterjesztünk, és értelmezzük a $(\varphi_j) \subset \mathscr{D}((0,1))$ függvényeket a $\varphi_j(x) = \frac{1}{j!}\varphi(j - jx)$ $(x \in (0,1), j = 1, 2, \dots)$ hozzárendeléssel. Igaz-e, hogy ekkor a (φ_j) függvénysorozat konvergens a $\mathscr{D}((0,1))$ térben? Ha igen, mi a határértéke?

6. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ a $(0,0)$, $(1,0)$ és $(1,1)$ pontok által meghatározott nyílt háromszöglap a síkon. Értelmezzük az $u \colon \mathscr{D}(H) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:

$$u(\varphi) := \int_0^1 \int_0^x \varphi(x,y)\,dy\,dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(H)).$$

Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(H)$! Mutassuk meg, hogy $\partial_1 u + \partial_2 u = 0$!

7. Adjuk meg a következő rendszer egy első integrálját, vagyis olyan $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amely állandó a megoldásgörbék mentén (tehát $t \mapsto \varphi(x(t), y(t))$ konstansfüggvény)!

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = (x+y)^2. \end{cases}$$