9. feladatsor
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2015. ősz

1. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \le p \le \infty$. Értelmezzük a $P\colon W^{1,p}(a,b) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ kiterjesztési operátort a következőképpen:

$$(Pu)(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a-1, \\ u(a)(x-a+1), & \text{ha } a-1 < x < a, \\ u(x), & \text{ha } a < x < b, \\ u(b)(b+1-x), & \text{ha } b < x < b+1. \\ 0, & \text{ha } b+1 < x. \end{cases}$$

   Bizonyítsuk be, hogy $P\colon W^{1,p}(a,b) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ korlátos lineáris operátor, amelyre minden $u \in W^{1,p}(a,b)$ esetén $(Pu)(x) = 0$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus (a-1, b+1)$.

2. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \le p \le \infty$. Igaz-e, hogy
   a) ha egy $(u_j) \subset W^{1,p}(a,b)$ sorozat konvergens a $W^{1,p}(a,b)$ tér normája szerint, akkor egyenletesen is konvergens?
   b) ha egy $(u_j) \subset W^{1,p}(a,b)$ sorozat egyenletesen konvergens, akkor a $W^{1,p}(a,b)$ tér normája szerint is konvergens?

3. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \le p \le \infty$. Igazoljuk, hogy létezik $C > 0$ (csak a-tól és b-től függő) konstans, hogy minden $u \in W^{1,p}(a,b)$ esetén

$$\left\| u - \frac{1}{b-a} \int_a^b u \right\|_{L^p(a,b)} \le C \|u'\|_{L^p(a,b)}.$$

4. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum és $1 \le p \le \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ha $V \subset W^{1,p}(a,b)$ az alábbi alterek valamelyike, akkor létezik $C > 0$ (csak a-tól és b-től függő) konstans, hogy minden $u \in V$ esetén $\|u\|_{L^p(a,b)} \le C\|u'\|_{L^p(a,b)}$.
   a) $V := \left\{ u \in W^{1,p}(a,b) : \int_a^b u = 0 \right\}$;
   b) $V := W_0^{1,p}(a,b)$;
   c) $V := \{ u \in W^{1,p}(a,b) : u(c) = 0 \}$, ahol $c \in [a,b]$ rögzített.

   Igaz-e az egyenlőtlenség $V := \{ u \in W^{1,p}(a,b) : u(a) = u(b) \}$ esetén?

5. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum. Bizonyítsuk be, hogy minden $u \in H_0^1(a,b)$ esetén

$$\|u\|_{L^2(a,b)} \le \frac{b-a}{\pi} \|u'\|_{L^2(a,b)}.$$

   Igazoljuk, hogy a $(b-a)/\pi$ konstans nem javítható. Mutassuk meg, hogy fordított egyenlőtlenség semmilyen konstanssal sem teljesülhet minden $u \in H_0^1(a,b)$ esetén.

6. Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum. Tekintsük a $H^1(a,b)$ Hilbert-teret a szokásos $\langle u,v \rangle = \int_a^b (uv + u'v')$ skalárszorzattal. Mi az alábbi $V \subset H^1(a,b)$ alterek merőleges kiegészítője a $H^1(a,b)$ térben?
   a) $V := H_0^1(a,b)$;
   b) $V := \{ u \in H^1(a,b) : u(a) = 0 \}$;
   c) $V := \{ u \in H^1(a,b) : u(a) = u(b) \}$.