4. feladatsor
Alkmat/Mat MSc parcdiff 2015. ősz

1. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \chi_{[a,b]}$ (az $[a,b]$ intervallum karakterisztikus függvénye). Számítsuk ki f Fourier-transzformáltját!

2. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-|x|}$.

   a) Igazoljuk, hogy $(\mathscr{F}(f))(\xi) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{1+\xi^2}$.

   b) Bizonyítsuk be, hogy $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x\xi)}{1+\xi^2}\, d\xi = \pi e^{-|x|}$.

3. Számítsuk ki az alábbi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Fourier-transzformáltjait!

   a) $f(x) = e^{-x^2}$

   b) $f(x) = xe^{-x^2}$

4. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ és α multiindex. Igazoljuk, hogy az alábbi disztribúciók mindegyike temperált (azaz $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$-beli), majd számítsuk ki a Fourier-transzformáltjukat!

   a) δ_a

   b) 1

   c) $\partial^\alpha \delta_a$

   d) x^α

   e) $\delta_{S_R(0)}$ $\quad (n = 3)$

5. Igazoljuk, hogy $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$\mathscr{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathscr{F}(f) \cdot \mathscr{F}(g).$$

6. Tegyük fel, hogy az $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvényre $f * f = f$. Mutassuk meg, hogy ekkor $f = 0$ m. m. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $f * g = g$ minden $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ esetén.

7. Határozzuk meg az $y' = 0$ egyenlet összes $y \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldását!

8. A Fourier-transzformáció segítségével adjuk meg az $xy = 0$ egyenlet összes $y \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldását! Oldjuk meg a feladatot a Fourier-transzformáció nélkül is!

9. A Fourier-transzformáció segítségével keressük meg az $x^m y = 0$ $(m \in \mathbb{N})$ egyenlet összes $y \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ megoldását! Oldjuk meg a feladatot a Fourier-transzformáció nélkül is!